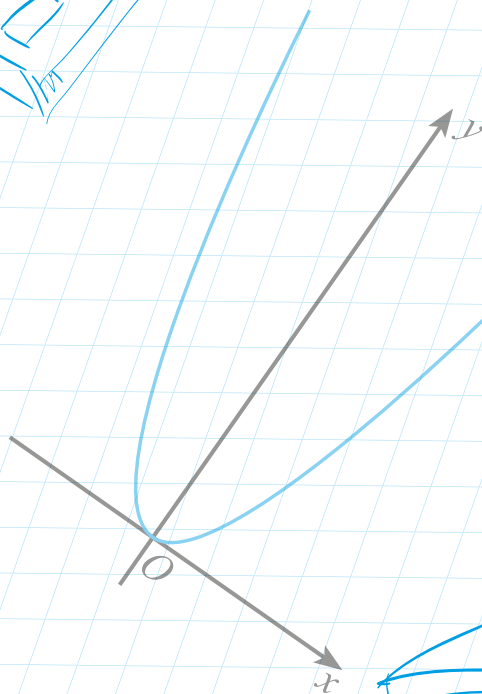
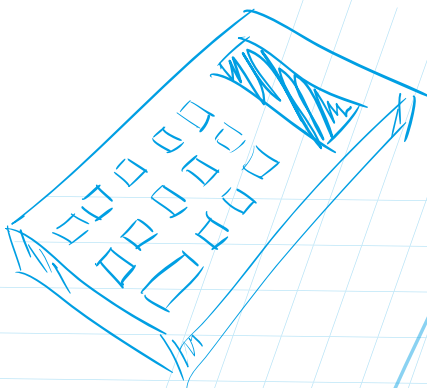


MATEMATICA

Manual pentru clasa a IX-a

PAGINĂ TEHNICĂ

ALGEBRĂ

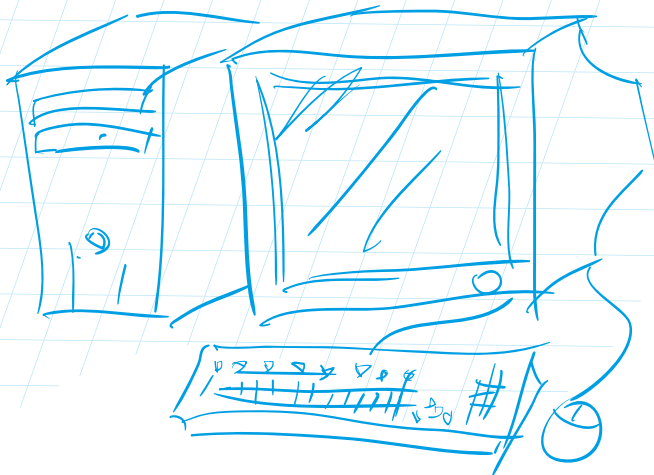


$$64a^9 + 48a^6b + 12a^3b^2 + b^3$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,5x^2 + 2x$$

$$\frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3}$$



Recapitulare și completări

1. Mulțimea numerelor reale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ este **mulțimea numerelor naturale**.

$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ este **mulțimea numerelor naturale nenule**.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ este **mulțimea numerelor întregi**.

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ este **mulțimea numerelor întregi nenule**.

$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ este **mulțimea numerelor întregi pozitive**.

$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ este **mulțimea numerelor întregi negative**.

Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{Z}^*$, atunci $a : b = \frac{a}{b}$. $\frac{a}{b}$ este **fracția** cu numărătorul a și numitorul b .

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt **echivalente**, dacă $ad = bc$. și se scrie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Fracția $\frac{a}{b}$ se numește **irreductibilă**, dacă numerele a și b sunt prime între ele ($(a, b) = 1$).

Celelalte fracții se numesc **reductibile**. Mulțimea fracțiilor este $\left\{\frac{a}{b} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ și } n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Numerele scrise în baza 10 se numesc **numere zecimale**.

Număr rațional. Orice fracție este un număr rațional, dar două fracții diferite nu sunt întotdeauna două numere raționale diferite. Toate fracțiile echivalente cu o fracție dată definesc un număr rațional și numai unul. *Un număr zecimal care poate fi convertit în fracție este un număr rațional.*

Mulțimea numerelor raționale. Numerele zecimale au o scriere pozițională. Numai numerele zecimale cu un număr finit de zecimale și numerele zecimale periodice pot fi convertite în fracții.

$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ este un număr care poate fi scris sub formă de fracție}\}.$

Teorema. Numărul $\sqrt{3}$ nu este rațional.

Demonstrația prin reducere la absurd. Se presupune că $\sqrt{3}$ este număr rațional, adică poate fi scris ca fracție irreductibilă, $\frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$, (1). Atunci $\frac{m^2}{n^2} = 3$, de unde $m^2 = 3n^2$, (2). (2) implică $m = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, (3). Din (2) și (3) rezultă $9k^2 = 3n^2$, de unde se deduce că $3k^2 = n^2$, (4). (4) implică $n = 3p$, $p \in \mathbb{N}$, (5). (3) și (5) implică $(m, n) \neq 1$, ceea ce contrazice (1). Prin urmare, presupunerea că $\sqrt{3}$ este număr rațional este falsă, deci numărul $\sqrt{3}$ nu este număr rațional.

Mulțimea numerelor iraționale (I). $\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ este un număr zecimal ce nu se convertește într-o fracție}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Un număr zecimal care nu poate fi convertit în fracție este un număr irațional.*

Mulțimea numerelor reale (R)

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ este un număr rațional sau un număr irațional}\}. \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$

■ Exerciții rezolvate

1) Fie 1,24816... După virgulă sunt puterile naturale nenule ale lui 2: 2, 4, 8, 16 etc. Numărul este irațional deoarece nu se poate scrie sub formă de fracție.

2) $-5,(12) = -5 \frac{12}{99} = -5 \frac{4}{33}.$

3) $8,3(26) = 8 + \frac{326 - 3}{990} = 8 \frac{323}{990}.$

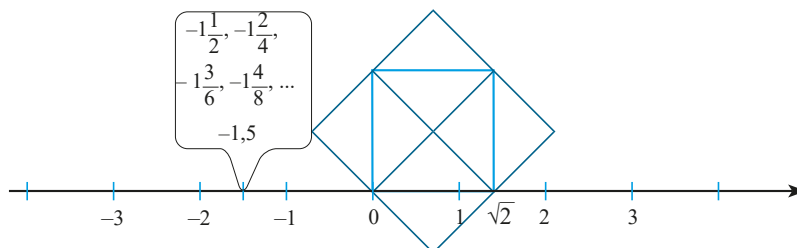
4) Pentru a afla câte numere diferite sunt în șirul: $\frac{13}{17}, \frac{57}{71}, \frac{1\ 313}{1\ 717}, \frac{575\ 757}{717\ 171}$ se constată că $\frac{1\ 313}{1\ 717} = \frac{13 \cdot 101}{17 \cdot 101}$ și $\frac{575\ 757}{717\ 171} = \frac{57 \cdot 10\ 101}{57 \cdot 10\ 101} = \frac{57}{71}$. Prin urmare, în șir sunt două numere diferite.

■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile: a) $\mathbb{N} = \{\dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{\dots\}$. b) $\mathbb{Z} = \{\dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{\dots\}$. c) $\mathbb{Q} = \dots$ d) $\mathbb{R} = \dots$
- Completați și completați propozițiile:
a) $\mathbb{Z}_+$ este ...; b) $\mathbb{Z}_-$ este ...; c) $\mathbb{Q}_+$ este ...; d) $\mathbb{Q}_-$ este ...; e) $\mathbb{R}_+$ este ...; f) $\mathbb{R}_-$ este ...
- Converțiți în fracții ireductibile numerele:
a) $-12,(241)$; b) $-34,(1252)$; c) $-57,(379)$; d) $-71,(6732)$; e) $-189,(1037)$.
- Converțiți în fracție numerele:
a) $-28,0(902)$; b) $-67,0(8338)$; c) $-95,0(1934)$; d) $-64,0(1905)$; e) $-91,0(4691)$.
- Converțiți în fracție numerele:
a) $-15,5(98)$; b) $-21,23(152)$; c) $-27,67(4)$; d) $-36,673(7)$; e) $-38,429(3)$.
- Aflați câte numere diferite sunt în fiecare șir:
a) $23,(7)$, $23\frac{7}{9}$, $4,7(24)$, $4\frac{717}{990}$; b) $16,(24)$, $16\frac{24}{99}$, $6,12(8)$, $6\frac{116}{900}$;
c) $8,(37)$, $8\frac{38}{99}$, $1,73(4)$, $1\frac{661}{900}$; d) $3,(74)$, $3\frac{74}{99}$, $8,51(2)$, $8\frac{451}{900}$.
- Aflați câte numere diferite sunt în șirul:
a) $\frac{312\ 312}{413\ 413}$, $\frac{312\ 312\ 312}{413\ 413\ 413}$; b) $\frac{5\ 757}{8\ 383}$, $\frac{57\ 575\ 757}{83\ 838\ 383}$; c) $\frac{142\ 142\ 142}{241\ 241\ 241}$, $\frac{142\ 142\ 142\ 142}{241\ 241\ 241\ 241}$.
- Recunoașteți numerele raționale din șirul:
a) $4,55\dots$; $12,345678\dots$; $-98,121212\dots$; $-10,2003000400000\dots$; $-66,10345345345$;
b) $-6,31222\dots$; $-13,525252\dots$; $-1,49162536\dots$; $-6,1357531357531\dots$;
c) $79,010010001\dots$; $21,024681012\dots$; $-29,307307307\dots$;
d) $83,102102102\dots$; $49,074074074\dots$; $-67,3821382138213821\dots$; $-82,248163264\dots$
- Demonstrați că:
a) $\sqrt{5}$ este număr irațional; b) $\sqrt{6}$ este număr irațional; c) $\sqrt{7}$ este număr irațional;
d) $\sqrt{10}$ este număr irațional; e) $\sqrt{10}$ este număr irațional; f) $\sqrt{11}$ este număr irațional.
- Decideți câți termeni ai șirului nu pot fi scriși:
a) $0,1$; $0,11$; $0,111$; $0,1111$; $0,11111$; $0,111111$; ...; $0,(1)$;
b) $0,25$; $0,2525$; $0,252525$; $0,25252525$; $0,2525252525$; ...; $0,(25)$;
c) $0,302$; $0,302302$; $0,302302302$; $0,3023020302302$; $0,302302302302302$; ...; $0,(302)$.
- Decideți câți termeni ai șirului nu pot fi scriși:
a) $0,15$; $0,155$; $0,1555$; $0,15555$; $0,155555$; $0,1555555$; ...; $0,1(5)$;
b) $0,317$; $0,31717$; $0,3171717$; $0,317171717$; $0,31717171717$; ...; $0,3(17)$;
c) $0,7516$; $0,7516516$; $0,7516516516$; $0,7516516516516$; $0,7516516516516516$; ...; $0,7(516)$.
- Fie $3,7$. Atunci $3,7 = 3 + \frac{7}{10} = 3 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$.
Aplicând fracțiile continue, scrieți numerele:
a) $15,7$; b) $8\frac{3}{16}$; c) $19\frac{18}{53}$.
- Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuațiile: a) $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{37}{15}$; b) $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{74}{25}$.
- Fie $m = \overline{abc}$. Găsiți numerele m pentru care a, c sunt pătrate perfecte și $b = 2\sqrt{ac}$. Arătați că aceste numere sunt pătrate perfecte.

2. Reprezentarea numerelor reale pe axă. Modulul unui număr real

• **Reprezentarea pe axă a numerelor reale.** Se reprezintă numerele întregi, numerele raționale, numerele iraționale. Mai jos sunt reprezentate numărul rațional $-1,5$ și numărul irațional $\sqrt{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora, ipotenuza unui triunghi dreptunghic ale cărui catete au lungimile 1 și $\sqrt{2}$ are lungimea $\sqrt{3}$. În general, pentru a reprezenta pe axă un număr irațional se folosește aproximarea lui cu un număr rațional.



• **Modulul unui număr real.** Modulul numărului real x este distanța pe axa numerelor de la 0 până la punctul axei ce corespunde numărului real x și

$$|x| = \max \{-x, x\} = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Proprietăți ale modulului

- 1) $|x| \geq 0, x \in \mathbb{R}$; 2) $|x| \geq x, x \in \mathbb{R}$; 3) $|x| > 0, x \in \mathbb{R}^*$; 4) $|x| = |-x|, x \in \mathbb{R}$;
- 5) $|x|^2 = x^2 = |-x|^2, x \in \mathbb{R}$; 6) $\sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$; 7) $|ab| = |a| \cdot |b|$; 8) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}^*$;
- 9) $|x| < a, x \in \mathbb{R}, a > 0$, dacă și numai dacă $\{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$;
- 10) $|x| > a, x \in \mathbb{R}, a > 0$, dacă și numai dacă $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -a \text{ sau } x > a\}$;
- 11) $|x| > a, x \in \mathbb{R}, a > 0$, dacă și numai dacă $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -a \text{ sau } x > a\}$;
- 12) $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$;
- 13) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Exerciții rezolvate

- 1) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|3x + 5| = 4$ se aplică proprietatea 4) a modulului.
Se obține: $|3x + 5| = 4 \Leftrightarrow 3x + 5 = 4 \text{ sau } 3x + 5 = -4 \Leftrightarrow x = -0,3 \text{ sau } x = -3. S = \{-3; -0,3\}$.
- 2) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|7x - 5| = |3x + 17|$ se aplică proprietatea 4) a modulului. Rezultă:
 $|7x - 5| = |3x + 17| \Leftrightarrow 7x - 5 = 3x + 17 \text{ sau } 7x - 5 = -3x - 17 \Leftrightarrow x = 5,5 \text{ sau } x = -1,2. S = \{5,5; -1,2\}$.
- 3) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|3x^2 - 1| + |x^2 - 2| = 3$ se observă că în 0 propoziția este adevărată.
Se obține $S = \{0\}$.
- 4) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x + 1| + |4x - 3| = 0$ se ține cont că $|2x + 1| \geq 0$ și $|4x - 3| \geq 0$.
 $2x + 1 = 0$ are soluția $-0,5$ și $4x - 3 = 0$ are soluția $0,75$. Ecuația $|2x + 1| + |4x - 3| = 0$ are $S = \emptyset$.
- 5) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|x^2 - 5x + 4| = 2$ se aplică proprietatea 4) a modulului.
Se obține: $|x^2 - 5x + 4| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2 \text{ sau } x^2 - 5x + 4 = -2$. Se rezolvă fiecare ecuație și se obține mulțimea soluțiilor ecuației inițiale: $S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, 2, 3, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right\}$.
- 6) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x^2 + 5| = |3x - 8|$ se aplică proprietatea 4) a modulului.
Se obține: $|2x^2 + 5| = |3x - 8| \Leftrightarrow 2x^2 + 5 = 3x - 8 \text{ sau } 2x^2 + 5 = 8 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 13 = 0 \text{ sau } 2x^2 + 3x - 3 = 0$. Se rezolvă fiecare ecuație și se obține rezultă: $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-3 + \sqrt{33}}{4} \right\}$.

■ Exerciții

- Reprezentați pe axă numerele: a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{6}$; d) $\sqrt{7}$.
- Identificați câte puncte se obțin, reprezentând numerele:
 - $5, 7, 5\frac{14}{20}, 5\frac{35}{50}, 5, (7);$
 - $6, 2, 6\frac{6}{30}, 6\frac{8}{50}, 5, (2);$
 - $11, 3, 11\frac{6}{30}, 11\frac{8}{40}, 11, (3).$
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Modulul numărului a se notează ...
 - Modulul lui a este ... = $\max \{.. \}$.
 - Modulul lui b este ... = ...
- Completați propozițiile:
 - $|x| \geq ...;$
 - $|x| \dots x, ...;$
 - $|x| \dots 0, ...;$
 - $|x| \dots |-x| ...;$
 - $|x|^2 = ... = ..., ...;$
 - $\sqrt{x^2} = ..., ...;$
 - $|ab| = ...;$
 - $\left|\frac{a}{b}\right| = ..., ...;$
 - $|x| < a, ...;$
 - $|x| > a, ...;$
 - $|x + y| \leq ...;$
 - $||x| - |y|| \leq ...$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $|2x + 12| = 9$; b) $|4x + 15| = 6$; c) $|5x + 22| = 10$; d) $|8x + 29| = 17$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 - $|8x - 9| = |11x + 6|;$
 - $|9x - 12| = |7x + 32|;$
 - $|10x - 9| = |13x + 22|;$
 - $|12x - 8| = |17x + 3|;$
 - $|12x - 15| = |3x + 18|;$
 - $|25x - 80| = |2x + 56|.$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 - $|5x^2 - 3| + |9x^2 - 12| = 15;$
 - $|16x^2 - 5| + |26x^2 - 7| = 12;$
 - $|38x^2 - 8| + |78x^2 - 9| = 17;$
 - $|6x^2 - 13| + |4x^2 - 9| = 22;$
 - $|5x^2 - 43| + |3x^2 - 31| = 74;$
 - $|7x^2 - 17| + |3x^2 - 25| = 42.$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 - $|5x^2 - 7| - |9x^2 - 5| = 2;$
 - $|2x^2 - 28| - |9x^2 - 13| = 15;$
 - $|13x^2 - 11| - |6x^2 - 7| = 4;$
 - $|2x^2 - 15| - |4x^2 - 9| = 6;$
 - $|5x^2 - 89| - |2x^2 - 54| = 35;$
 - $|11x^2 - 17| - |2x^2 - 3| = 14.$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $|8x + 5| + |2x - 7| = 0$; b) $|9x + 4| + |5x - 8| = 0$;
 - $|3x + 18| + |7x - 23| = 0;$
 - $|5x + 12| + |4x - 29| = 0.$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 - $|7x^2 + 2| = |4x - 7|;$
 - $|9x^2 + 7| = |3x - 5|;$
 - $|8x^2 + 11| = |3x - 6|;$
 - $|2x^2 + 27| = |14x - 9|;$
 - $|11x^2 + 2| = |5x - 2|;$
 - $|93x^2 + 15| = |5x - 15.$
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 - $|x^2 - 4x + 1| = 3;$
 - $|x^2 - 8x + 1| = 15;$
 - $|x^2 - 6x + 8| = 1;$
 - $|x^2 - 10x + 1| = 24;$
 - $|x^2 - 5x + 31| = 27;$
 - $|x^2 - 18x + 1| = 44.$
- Aflați numerele reale x, y, z și t care verifică propoziția:
 - $|3x + 11| + |8y - 15| + |18z - 15| + |25t - 27| = 0;$
 - $|5x + \sqrt{5}| + |\sqrt{7}y - 14| + |\sqrt{2}z - 24| + |\sqrt{13}t - 26| = 0.$
- Aflați numerele reale x, y și z care verifică propoziția:
 - $\sqrt{9x^2 - 30x + 25} + \sqrt{25y^2 + 70y + 49} + \sqrt{81z^2 + 72z + 16} = 0;$
 - $\sqrt{16x^2 - 8x\sqrt{5} + 5} + \sqrt{11y^2 - 2y\sqrt{33} + 3} + \sqrt{16z^2 - 8z\sqrt{37} + 37} = 0.$
- Aflați numerele reale x, y și z care verifică propoziția:
 - $\sqrt{36x^2 - 12x + 5} + \sqrt{121y^2 + 66y + 34} + \sqrt{9z^2 + 24z + 80} = 15;$
 - $\sqrt{11x^2 - 2x\sqrt{77} + 43} + \sqrt{15y^2 + 2y\sqrt{75} + 126} + \sqrt{17z^2 - 2z\sqrt{51} + 103} = 27.$
- Completați șirurile cu termenii care lipsesc:
 - $\sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, ..., \sqrt{19}, \sqrt{31}, ..., ..., ...;$
 - $\sqrt{22}, \sqrt{24}, \sqrt{26}, ..., \sqrt{40}, \sqrt{42}, ..., ..., ...$

3. Operații cu numere reale

• Pentru a aproxima cu 0,01 suma $\sqrt{21} + \sqrt{38}$ se folosesc aproximațiile cu 0,001 ale celor doi termeni. Se obține: $4,582 < \sqrt{21} < 4,583$ și $6,164 < \sqrt{38} < 6,165$. Rezultă: $4,582 + 6,164 < \sqrt{21} + \sqrt{38} < 4,583 + 6,165$, de unde $10,746 < \sqrt{21} + \sqrt{38} < 10,748$. Aproximația prin lipsă cu 0,01 a numărului $\sqrt{21} + \sqrt{38}$ este 10,74, iar aproximația prin adaos cu 0,01 este 10,75.

• Pentru a aproxima cu 0,01 diferența $\sqrt{78} - \sqrt{41}$ se aproximează termenii cu 0,001. Se obține: $8,831 < \sqrt{78} < 8,832$ și $6,403 < \sqrt{41} < 6,404$. Rezultă: $8,831 - 6,404 < \sqrt{78} - \sqrt{41} < 8,832 - 6,403$, de unde $2,427 < \sqrt{78} - \sqrt{41} < 2,429$ și $2,42 < \sqrt{78} - \sqrt{41} < 2,43$. Aproximația prin lipsă cu 0,01 a diferenței $\sqrt{78} - \sqrt{41}$ este 2,42, iar aproximația prin adaos cu 0,01 este 2,43.

• Pentru a aproxima cu 0,02 produsul $-\sqrt{31} \cdot \sqrt{69}$ se aproximează factorii lui cu 0,001. Se obține: $5,567 < \sqrt{31} < 5,568$ și $8,306 < \sqrt{69} < 8,307$. Rezultă: $46,239 < \sqrt{31} \cdot \sqrt{69} < 46,253$, de unde $-46,25 < -\sqrt{31} \cdot \sqrt{69} < -46,23$. Aproximația prin lipsă cu 0,02 a numărului $-\sqrt{31} \cdot \sqrt{69}$ este -46,25, iar aproximația prin adaos cu 0,02 este -46,23.

Proprietăți adunării numerelor reale

- 1) *Asociativitatea*: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- 2) *Comutativitatea*: $a + b = b + a$.
- 3) *0 este element neutru*: $0 + a = a + 0 = a$.
- 4) *Opusul numărului a este -a și $a + (-a) = 0$* .

Proprietăți înmulțirii numerelor reale

- 1) *Asociativitatea*: $a(bc) = (ab)c$.
- 2) *Comutativitatea*: $ab = ba$.
- 3) *1 este element neutru*: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- 4) *Inversul numărului nenul a este $\frac{1}{a}$ și $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a$* .
- 5) *Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere*: $a(b + c) = ab + ac$, $a(b - c) = ab - ac$.

Ordinea efectuării operațiilor

Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul II, iar ridicarea la putere și extragerea rădăcinii păturate sunt operații de ordinul III.

1) Pentru a aduce la forma cea mai simplă o expresie fără paranteze, care conține operații de mai multe ordine, se execută operațiile de ordinul III, dacă există, apoi operațiile de ordinul II, dacă există, și se termină, executând operațiile de ordinul I.

2) Dacă o expresie conține paranteze, atunci se aduc la forma cea mai simplă expresiile scrise în paranteze, respectând regula 1), după care se aduce la forma cea mai simplă expresia care se obține.

Formule de calcul prescurtat

1. Pătratul sumei: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Pătratul diferenței: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Cubul sumei: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4. Cubul diferenței: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
5. Produsul sumei cu diferența: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
6. Produs egal cu suma cuburilor: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
7. Produs egal cu diferența cuburilor: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

■ Exerciții

1. Aproximați cu 0,01: a) $\sqrt{37} + \sqrt{43}$; b) $\sqrt{55} + \sqrt{74}$; c) $\sqrt{46} + \sqrt{85}$; d) $\sqrt{89} + \sqrt{76}$.
2. Aproximați cu 0,01: a) $\sqrt{95} - \sqrt{43}$; b) $\sqrt{55} - \sqrt{74}$; c) $\sqrt{92} - \sqrt{66}$; d) $\sqrt{23} - \sqrt{83}$.
3. Aproximați cu 0,02: a) $-\sqrt{58} \cdot \sqrt{67}$; b) $-\sqrt{78} \cdot \sqrt{94}$; c) $-\sqrt{79} \cdot \sqrt{59}$; d) $-\sqrt{86} \cdot \sqrt{96}$.
4. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(\sqrt{11} + \sqrt{12})^2$; b) $(\sqrt{11} + \sqrt{13})^2$; c) $(\sqrt{11} + \sqrt{14})^2$; d) $(\sqrt{11} + \sqrt{17})^2$.
5. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(\sqrt{11} - \sqrt{17})^2$; b) $(\sqrt{11} - \sqrt{19})^2$; c) $(\sqrt{11} - \sqrt{21})^2$; d) $(\sqrt{11} - \sqrt{35})^2$.
6. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(1 + \sqrt{7})^3$; b) $(3 + \sqrt{2})^3$; c) $(2 + \sqrt{3})^3$; d) $(5 + \sqrt{6})^3$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(1 - \sqrt{7})^3$; b) $(3 - \sqrt{2})^3$; c) $(2 - \sqrt{3})^3$; d) $(5 - \sqrt{6})^3$.
8. Aduceți la forma cea mai simplă:
 a) $(\sqrt{71} + \sqrt{23})(\sqrt{71} - \sqrt{23})$; b) $(\sqrt{46} + \sqrt{53})(\sqrt{46} - \sqrt{53})$; c) $(\sqrt{82} + \sqrt{77})(\sqrt{82} - \sqrt{77})$;
 d) $(\sqrt{59} + \sqrt{69})(\sqrt{59} - \sqrt{69})$; e) $(\sqrt{55} + \sqrt{26})(\sqrt{55} - \sqrt{26})$; f) $(\sqrt{55} + \sqrt{26})(\sqrt{55} - \sqrt{26})$.
9. Aduceți la forma cea mai simplă:
 a) $(4 + 2\sqrt{7})(4 - 2\sqrt{7})$; b) $(3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})$; c) $(8 + 3\sqrt{2})(8 - 3\sqrt{2})$; d) $(9 + 3\sqrt{5})(9 - 3\sqrt{5})$;
 e) $(11 + 3\sqrt{7})(11 - 3\sqrt{7})$; f) $(12 + 3\sqrt{3})(12 - 3\sqrt{3})$; g) $(13 + 5\sqrt{5})(13 - 5\sqrt{5})$.
10. Aduceți la forma cea mai simplă:
 a) $(37 - \sqrt{73})(99 + \sqrt{73})$; b) $(19 - \sqrt{38})(11 + \sqrt{38})$; c) $(35 - \sqrt{53})(35 + \sqrt{53})$;
 d) $(14 - \sqrt{46})(16 + \sqrt{46})$; e) $(99 - \sqrt{23})(82 + \sqrt{23})$; f) $(42 - \sqrt{34})(48 + \sqrt{34})$.
11. Calculați cât mai simplu ($ab + ac = a(b + c)$):
 a) $1,95 \cdot 3,7 + 19,5 \cdot 6,3$; b) $29,4 \cdot 3,26 + 29,4 \cdot 6,74$; c) $32,19 \cdot 83,92 + 32,19 \cdot 16,08$.
12. Calculați cât mai simplu ($ab - ac = a(b - c)$):
 a) $8,35 \cdot 9,6 - 8,35 \cdot 8,6$; b) $6,48 \cdot 5,47 - 6,48 \cdot 4,47$; c) $74,31 \cdot 94,36 - 74,31 \cdot 84,36$.
13. Calculați cât mai simplu:
 a) $9,45 \cdot 3,34 + 9,45 \cdot 5,38 + 9,45 \cdot 1,28$; b) $16,75 \cdot 1,8 + 16,75 \cdot 2,7 + 16,75 \cdot 3,1 + 16,75 \cdot 2,4$.
14. Calculați cât mai simplu:
 a) $65,3 \cdot 2,37 + 65,3 \cdot 1,18 - 65,3 \cdot 1,55$; b) $3,21 \cdot 7,9 + 3,21 \cdot 9,4 - 3,21 \cdot 2,5 - 3,21 \cdot 4,8$.
15. Calculați cât mai simplu:
 a) $36 : 1,7 + 43 : 1,7 + 23 : 1,7$; b) $78 : 1,9 + 63 : 1,9 + 59 : 1,9$; c) $84 : 2,3 + 92 : 2,3 + 54 : 2,3$.
16. Calculați cât mai simplu:
 a) $3\ 824 : 7,3 + 5\ 715 : 7,3 - 2\ 312 : 7,3$; b) $5\ 516 : 9,1 + 4\ 851 : 9,1 - 1\ 358 : 9,1$.
17. Calculați cât mai simplu:
 a) $1,28 \cdot 1,75 + 1,28 \cdot 1,59 + 2,05 \cdot 1,75 + 2,05 \cdot 1,59$;
 b) $16,8 \cdot 16,9 + 16,8 \cdot 16,6 + 16,5 \cdot 16,9 + 16,5 \cdot 16,6$.
18. Calculați cât mai simplu:
 a) $23,7 \cdot 8,95 - 23,7 \cdot 2,28 + 42,9 \cdot 8,95 - 42,9 \cdot 2,28$;
 b) $34,9 \cdot 9,94 - 34,9 \cdot 3,26 + 31,7 \cdot 9,94 - 31,7 \cdot 3,26$.
19. Calculați cât mai simplu:
 a) $58,7 \cdot 7,63 - 58,7 \cdot 4,27 - 25,4 \cdot 7,63 + 25,4 \cdot 4,27$;
 b) $87,5 \cdot 8,03 - 87,5 \cdot 4,65 - 54,3 \cdot 8,03 + 54,3 \cdot 4,65$.
20. Calculați cât mai simplu:
 a) $79,2 \cdot 10,22 - 79,2 \cdot 6,85 - 45,9 \cdot 10,22 + 45,9 \cdot 6,85$;
 b) $12,41 \cdot 14,12 - 12,41 \cdot 7,45 - 5,78 \cdot 14,21 + 5,78 \cdot 7,45$.
21. Calculați cât mai simplu:
 a) $12,3 \cdot 1,15 + 12,3 \cdot 1,26 + 12,3 \cdot 0,98 + 20,8 \cdot 1,15 + 20,8 \cdot 1,26 + 20,8 \cdot 0,98$;
 b) $38,6 \cdot 2,32 + 38,6 \cdot 2,57 + 38,6 \cdot 1,79 + 27,6 \cdot 2,32 + 27,6 \cdot 2,57 + 27,6 \cdot 1,79$.
22. Calculați cât mai simplu:
 a) $15,5 \cdot 1,49 + 15,5 \cdot 5,73 - 15,5 \cdot 3,86 + 17,9 \cdot 1,49 + 17,9 \cdot 5,73 - 17,9 \cdot 3,86$;
 b) $37,5 \cdot 2,27 + 37,5 \cdot 8,35 - 37,5 \cdot 3,93 + 37,5 \cdot 2,27 + 37,5 \cdot 8,35 - 37,5 \cdot 3,93$;
 c) $10,7 \cdot 1,11 + 10,7 \cdot 6,73 - 10,7 \cdot 4,49 + 22,6 \cdot 1,11 + 22,6 \cdot 6,73 - 22,6 \cdot 4,49$;
 d) $32,8 \cdot 1,37 + 32,8 \cdot 8,74 - 32,8 \cdot 4,45 + 33,6 \cdot 1,37 + 33,6 \cdot 8,74 - 33,6 \cdot 4,45$.

4. Puteri cu exponent întreg

• Inversul numărului 41^9 este $\frac{1}{41^9}$. Aplicând înmulțirea puterilor, din propoziția $41^9 \cdot 41^x = 1$ rezultă:
 $41^9 \cdot 41^x = 41^0$, $9 + x = 0$, $x = -9$. Inversul numărului 41^9 este 41^{-9} .

• Aplicând rezultatul exercițiului anterior, rezultă: inversul lui $-29,7$ este $-29,7^{-1}$; inversul numărului $\frac{37}{54}$ este $\left(\frac{37}{54}\right)^{-1} = \frac{54}{37} = 1\frac{17}{37}$; $\left(\frac{13}{29}\right)^{-12} = \left(\frac{29}{13}\right)^{12} = \left(2\frac{3}{13}\right)^{12}$.

Puterea unui număr real. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ori}} = a^n$ (se citește „a la puterea en^{ta}”), $n \in \mathbb{N}$, a este baza puterii, n este exponentul puterii.

Proprietăți

- 1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3) $(a^n)^m = a^{nm}$; 4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
- 6) $(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar} \\ 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par;} \end{cases}$ 7) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, dacă $a \in \mathbb{R}^*$; 8) $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}^*$; 0^0 nu are sens.

Ordinea efectuării operațiilor

Ordinea efectuării operațiilor într-un exercițiu fără paranteze în care se execută adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri, ridicări la putere și extragerea rădăcinii pătrate se execută:

- 1) ridicarea la putere și extragerea rădăcinii pătrate în ordinea în care apar;
- 2) înmulțirile și împărțirile în ordinea în care apar;
- 3) adunările și scăderile în ordinea în care apar.

■ Exerciții rezolvate

1) Scrieți $0,125$ ca putere a lui 2. *Rezolvare.* $0,125 = \frac{125}{1000}^{(125)} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

2) Scrieți $\left(\frac{1}{81}\right)^5$ ca putere a lui 3. *Rezolvare.* $\left(\frac{1}{81}\right)^5 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = (3^{-4})^5 = 3^{-20}$.

3) Aduceți la forma cea mai simplă $(0,000064^3 \cdot 25^{-2})^4 : 125^7$.

Rezolvare. $0,000064 = \frac{1}{15625} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$; $(5^{-18} \cdot (5^2)^{-2})^4 : (5^3)^7 = 5^{-88} : 5^{21} = 5^{-109}$.

4) Aduceți la forma cea mai simplă $(-0,3)^{10} \cdot (-243)^2$.

Rezolvare. $0,3^{10} = \frac{1}{3^{10}}$; $(-243)^2 = (3^5)^2 = 3^{10}$; $(-0,3)^{10} \cdot (-243)^2 = (-1)^{2 \cdot 013} = (-1)^{2 \cdot 013} = -1$.

5) Aduceți la forma cea mai simplă $(5 + 3a^{-2})(5 - 3a^{-2})$.

Rezolvare. Se aplică o formulă de calcul prescurtat și se obține:

$$(5 + 3a^{-2})(5 - 3a^{-2}) = 25 - 9a^{-4} = 25 - \frac{9}{a^4} = \frac{25a^4 - 9}{a^4}.$$

6) Aduceți la forma cea mai simplă $(7 + 6a^{-3})(49 - 42a^{-3} + 36a^{-6})$.

Rezolvare. Se aplică o formulă de calcul prescurtat și se obține:

$$(7 + 6a^{-3})(49 - 42a^{-3} + 36a^{-6}) = 343 + 216a^{-9} = 343 + \frac{216}{a^9} = \frac{343a^9 + 216}{a^9}.$$

7) Aduceți la forma cea mai simplă $(5a^{-4} - 9b^{-2})(25a^{-8} + 45a^{-4}b^{-2} + 81b^{-4})$.

Rezolvare. Se aplică o formulă de calcul prescurtat și se obține:

$$(5a^{-4} - 9b^{-2})(25a^{-8} + 45a^{-4}b^{-2} + 81b^{-4}) = 125a^{-12} - 729b^{-6} = \frac{125}{a^{12}} - \frac{729}{b^6} = \frac{125b^6 - 729a^{12}}{a^{12}b^6}.$$

■ Exerciții

1. Coopiați și completați propozițiile adevărate:

- a) $a^n \cdot a^m = \dots$; b) $a^n : a^m = \dots$; c) $(a^n)^m = \dots$; d) $(ab)^n = \dots$; e) $\left|\frac{a}{b}\right|^n = \dots$;
 f) $(-1)^n = \dots$; g) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, pentru orice $\dots$; h) $a^0 = 1$, $a \in \dots$

2. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural:

- a) $x^{69} \cdot x^{-74} : x^{-24}$; b) $x^{83} \cdot x^{-55} : x^{-93}$; c) $a^{94} \cdot a^{-66} : a^{-39}$; d) $y^{17} \cdot y^{-69} : y^{-54}$.

3. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural:

- a) $\frac{1}{x^{37}} \cdot x^{-76} : x^{-45}$; b) $\frac{1}{a^{73}} \cdot a^{-92} : a^{-104}$; c) $\frac{1}{x^{46}} \cdot x^{-88} : x^{-92}$; d) $\frac{1}{a^{91}} \cdot a^{-33} : a^{-121}$.

4. Scrieți ca putere a lui 2: a) 0,25; b) 0,0625; c) 0,03125; d) 0,015625.

5. Scrieți ca putere a lui 5: a) 0,04; b) 0,0016; c) 0,00032; d) 0,0000128.

6. Scrieți ca putere a lui 3: a) $\frac{1}{27}$; b) $\frac{1}{243}$; c) $\frac{1}{729}$; d) $\frac{1}{2187}$.

7. Scrieți ca putere a lui 3: a) 0,(1); b) 0,(037); c) 0,(012345679).

8. Scrieți ca putere cu baza 2 sau 3 sau 5:

- a) $(0,0625^4 \cdot 8^{-3})^2 : 64^5$; b) $(0,0016^6 \cdot 125^{-5})^3 : 25^9$; c) $(0,015625^3 \cdot 16^{-8})^4 : 64^5$; d) $(0,(037)^5 \cdot 27^{-6})^5 : 81^7$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(8 + 3a^{-3})(8 - 3a^{-3})$; b) $(11 + 4a^{-4})(11 - 4a^{-4})$; c) $(13 + 5a^{-7})(13 - 5a^{-7})$;
 d) $(14 + 7a^{-5})(14 - 7a^{-5})$; e) $(15 + 8a^{-9})(15 - 8a^{-9})$; f) $(16 + 9a^{-11})(16 - 9a^{-11})$.

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(2 + 5a^{-5})(4 - 10a^{-5} + 25a^{-10})$; b) $(4 + 5a^{-7})(16 - 20a^{-7} + 25a^{-14})$;
 c) $(3 + 8a^{-9})(9 - 24a^{-9} + 64a^{-18})$; d) $(5 + 7a^{-11})(25 - 35a^{-11} + 49a^{-22})$.

11. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(2a^{-5} - 9b^{-3})(4a^{-10} + 18a^{-5}b^{-3} + 81b^{-6})$; b) $(3a^{-4} - 5b^{-6})(9a^{-8} + 15a^{-4}b^{-6} + 25b^{-12})$;
 c) $(7a^{-9} - 8b^{-7})(49a^{-18} + 56a^{-9}b^{-7} + 64b^{-14})$; d) $(9a^{-4} - 8b^{-5})(81a^{-8} + 72a^{-4}b^{-5} + 64b^{-10})$.

12. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $((\sqrt{2} + (\sqrt{2})^{-1})^2$; b) $((\sqrt{3} + (\sqrt{3})^{-1})^2$; c) $((\sqrt{5} + (\sqrt{5})^{-1})^2$; d) $((\sqrt{6} + (\sqrt{6})^{-1})^2$; e) $((\sqrt{7} + (\sqrt{7})^{-1})^2$.

13. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $((\sqrt{2} - (\sqrt{2})^{-1})^2$; b) $((\sqrt{3} - (\sqrt{3})^{-1})^2$; c) $((\sqrt{5} - (\sqrt{5})^{-1})^2$; d) $((\sqrt{6} - (\sqrt{6})^{-1})^2$; e) $((\sqrt{7} - (\sqrt{7})^{-1})^2$.

14. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $((\sqrt{11} + (\sqrt{11})^{-1})^3$; b) $((\sqrt{13} + (\sqrt{13})^{-1})^2$; c) $((\sqrt{15} + (\sqrt{15})^{-1})^2$; d) $((\sqrt{17} + (\sqrt{17})^{-1})^2$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $((\sqrt{11} - (\sqrt{11})^{-1})^3$; b) $((\sqrt{13} - (\sqrt{13})^{-1})^2$; c) $((\sqrt{15} - (\sqrt{15})^{-1})^2$; d) $((\sqrt{17} - (\sqrt{17})^{-1})^2$.

16. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(2a^{-5} - 9b^{-3})(4a^{-10} + 18a^{-5}b^{-3} + 81b^{-6})$; b) $(3a^{-7} - 7b^{-4})(9a^{-14} + 21a^{-7}b^{-4} + 49b^{-8})$.

17. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(\sqrt{2} - (\sqrt{2})^{-1})(\sqrt{2} + (\sqrt{2})^{-1})$; b) $(\sqrt{3} - (\sqrt{3})^{-1})(\sqrt{3} + (\sqrt{3})^{-1})$; c) $(\sqrt{6} - (\sqrt{6})^{-1})(\sqrt{6} + (\sqrt{6})^{-1})$.

18. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(1 - (\sqrt{2})^{-1})(1 + (\sqrt{2})^{-1} + (\sqrt{2})^{-2})$; b) $(1 - (\sqrt{3})^{-1})(1 + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^{-2})$.

19. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a) $(1 - (\sqrt{5})^{-1})(1 + (\sqrt{5})^{-1} + (\sqrt{5})^{-2} + (\sqrt{5})^{-3})$; b) $(1 - (\sqrt{7})^{-1})(1 + (\sqrt{7})^{-1} + (\sqrt{7})^{-2} + (\sqrt{7})^{-3})$.

5. Radicali de ordinul doi

• Numărul nenegativ b cu proprietatea $b^2 = a$, este **rădăcina pătrată** (radicalul de ordinul doi) a numărului nenegativ a .

• $b = \sqrt{a}$ („ b este rădăcina pătrată a lui a sau radicalul de ordinul doi din a “).

• **Extragerea rădăcinii pătrate** este algoritmul prin care se află rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ.

Proprietăți radicalilor

1) $\sqrt{a} = b, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, a^2 = b$. 2) $(\sqrt{a})^2 = a, a \in \mathbb{R}_+$. 3) $\sqrt{0} = 0$. 4) $\sqrt{1} = 1$. 5) $\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}_+$.

6) $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+$. 7) $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+, ab \geq 0$.

8) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+^*$. 9) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}^*, ab \geq 0$.

• Radicalii de forma $a\sqrt{b}$, (a și b sunt numere reale nenule) se numesc **radicali asemenea**. Reducerea radicalilor asemenea constă în înlocuirea tuturor radicalilor asemenea cu un singur radical al cărui coeficient este egal cu suma algebrică a coeficienților tuturor radicalilor asemenea ($a\sqrt{b}$ are coeficientul a).

• **Introducerea factorilor sub radicali.** $a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a < 0 \\ \sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a > 0 \end{cases}$

• **Scoaterea factorilor de sub radicali.** $\sqrt{a^2b} = |a| \sqrt{b}$.

• **Raționalizarea numitorilor unui raport.** $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \cdot \frac{x}{a + \sqrt{b}} = \frac{x(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$.

Radicalii de forma $a\sqrt{b}$, (a și b sunt numere reale nenule, $b > 0$) se numesc **radicali asemenea**. Reducerea radicalilor asemenea constă în înlocuirea tuturor radicalilor asemenea cu un singur radical al cărui coeficient este egal cu suma algebrică a coeficienților tuturor radicalilor asemenea ($a\sqrt{b}$ are coeficientul a).

• **Introducerea factorilor sub radicali.** Dacă $b > 0$, atunci $a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a < 0 \\ \sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a \geq 0 \end{cases}$

• **Scoaterea factorilor de sub radicali.** Dacă $b > 0$, atunci $\sqrt{a^2b} = |a| \sqrt{b}$.

■ Exerciții rezolvate

1) Efectuați $(\sqrt{47} - \sqrt{23})^2$.

Rezolvare. Pătratul diferenței implică: $(\sqrt{47} - \sqrt{23})^2 = (\sqrt{47})^2 - 2\sqrt{47}\sqrt{23} + (\sqrt{23})^2 = 70 - 2\sqrt{1081}$.

2) Efectuați $(\sqrt{19} - \sqrt{34})^3$.

Rezolvare. Se aplică formula cubului diferenței: $(\sqrt{19} - \sqrt{34})^3 = (\sqrt{19})^3 - 3(\sqrt{19})^2\sqrt{34} + 3\sqrt{19}(\sqrt{34})^2 - (\sqrt{34})^3 = 19\sqrt{19} - 57\sqrt{34} + 102\sqrt{19} - 34\sqrt{34}$.

3) Scrieți mai simplu: $\sqrt{(x - 76)^{98}}, x < 71,5$.

Rezolvare. Deoarece $x - 76 < 0$ pentru $x < 71,5$, rezultă: $\sqrt{(x - 76)^{98}} = |(x - 76)^{49}| = (76 - x)^{49}$.

4) Aplicând o formulă, efectuați: $(\sqrt{38} - 5)(63 + 5\sqrt{38})$.

Rezolvare. Se aplică formula sumei cuburilor și se rezultă:

$$(\sqrt{38} - 5)(63 + 5\sqrt{38}) = (\sqrt{38} - 5)(38 + 5\sqrt{38} + 25) = 38\sqrt{38} + 125.$$

5) Aplicând o formulă, efectuați: $(\sqrt{69} + 10)(169 - 10\sqrt{69})$.

Rezolvare. Se aplică formula sumei cuburilor și rezultă:

$$(\sqrt{69} + 10)(169 - 10\sqrt{69}) = (\sqrt{69} + 10)(69 - 10\sqrt{69} + 100) = 69\sqrt{69} + 1000.$$

■ Exerciții

1. Reduceți radicalii asemenea:
a) $55\sqrt{31} - 67\sqrt{31}$; b) $36\sqrt{53} - 77\sqrt{53}$; c) $92\sqrt{35} - 172\sqrt{35}$; d) $91\sqrt{47} - 99\sqrt{47}$; e) $43\sqrt{73} - 81\sqrt{73}$.
2. Reduceți radicalii asemenea:
a) $38\sqrt{15} - 59\sqrt{46} + 81\sqrt{15} - 38\sqrt{46}$; b) $81\sqrt{29} - 24\sqrt{61} - 72\sqrt{29} - 41\sqrt{61}$;
c) $49\sqrt{11} - 93\sqrt{26} - 65\sqrt{11} - 28\sqrt{26}$; d) $89\sqrt{23} - 53\sqrt{55} - 39\sqrt{23} - 95\sqrt{55}$.
3. Completați: a) Dacă a și b sunt numere nenegative, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \dots$ b) Dacă $a \geq 0$ și $b > 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dots$
4. Efectuați: a) $-\sqrt{33} \cdot \sqrt{34}$; b) $-\sqrt{66} \cdot \sqrt{67}$; c) $-\sqrt{21} \cdot \sqrt{23}$; d) $-\sqrt{35} \cdot \sqrt{33}$; e) $-\sqrt{35} \cdot \sqrt{33}$.
5. Efectuați: a) $8\sqrt{94} : (2\sqrt{47})$; b) $9\sqrt{96} : (3\sqrt{48})$; c) $6\sqrt{76} : (2\sqrt{38})$; d) $8\sqrt{78} : (4\sqrt{38})$.
6. Efectuați:
a) $\sqrt{99}(\sqrt{91} - \sqrt{19})$; b) $\sqrt{99}(\sqrt{82} - \sqrt{28})$; c) $\sqrt{99}(\sqrt{73} - \sqrt{37})$; d) $\sqrt{99}(\sqrt{64} - \sqrt{46})$.
7. Efectuați:
a) $(2\sqrt{11} - \sqrt{15})(2\sqrt{11} + \sqrt{15})$; b) $(3\sqrt{79} - \sqrt{87})(3\sqrt{79} + \sqrt{87})$; c) $(2\sqrt{55} - \sqrt{51})(2\sqrt{55} + \sqrt{51})$;
d) $(3\sqrt{35} - \sqrt{93})(3\sqrt{35} + \sqrt{93})$; e) $(4\sqrt{46} - \sqrt{41})(4\sqrt{46} + \sqrt{41})$; f) $(5\sqrt{66} - \sqrt{53})(2\sqrt{66} + \sqrt{53})$.
8. Efectuați:
a) $(\sqrt{21} + \sqrt{29})^2$; b) $(\sqrt{33} + \sqrt{34})^2$; c) $(\sqrt{33} + \sqrt{35})^2$; d) $(\sqrt{37} + \sqrt{33})^2$; e) $(\sqrt{54} + \sqrt{56})^2$.
9. Efectuați:
a) $(\sqrt{34} - \sqrt{35})^2$; b) $(\sqrt{67} - \sqrt{66})^2$; c) $(\sqrt{29} - \sqrt{21})^2$; d) $(\sqrt{39} - \sqrt{31})^2$; e) $(\sqrt{92} - \sqrt{98})^2$.
10. Efectuați:
a) $(\sqrt{17} + \sqrt{13})^3$; b) $(\sqrt{43} + \sqrt{47})^3$; c) $(\sqrt{53} + \sqrt{57})^3$; d) $(\sqrt{61} + \sqrt{69})^3$; e) $(\sqrt{83} + \sqrt{87})^3$.
11. Efectuați:
a) $(\sqrt{29} - \sqrt{21})^3$; b) $(\sqrt{35} - \sqrt{33})^3$; c) $(\sqrt{71} - \sqrt{79})^3$; d) $(\sqrt{33} - \sqrt{37})^3$.
12. Copiați și completați propozițiile: a) Dacă $b > 0$, $\sqrt{a^2b} = \dots$ b) Dacă $b > 0$, $a\sqrt{b} = \dots$
13. Introduceți factorii sub radical: a) $-6\sqrt{93}$; b) $-3\sqrt{95}$; c) $-2\sqrt{73}$; d) $-5\sqrt{71}$.
14. Ordonăți crescător:
a) $15\sqrt{7}$, $18\sqrt{5}$, $6\sqrt{96}$; b) $21\sqrt{5}$, $22\sqrt{3}$, $5\sqrt{73}$; c) $31\sqrt{6}$, $4\sqrt{97}$, $11\sqrt{13}$; d) $34\sqrt{5}$, $8\sqrt{23}$, $17\sqrt{15}$.
15. Introduceți factorii sub radical:
a) $a^{11}\sqrt{79}$, $a < 0$; b) $b^{13}\sqrt{29}$, $b < 0$; c) $y^{37}\sqrt{61}$, $y < 0$; d) $x^{73}\sqrt{39}$, $x < 0$.
16. Scoateți factorii de sub radical:
a) $\sqrt{1859}$; b) $\sqrt{2816}$; c) $\sqrt{8125}$; d) $\sqrt{9225}$; e) $\sqrt{4851}$; f) $\sqrt{8788}$.
17. Scrieți cât mai simplu: a) $\sqrt{a^{94}}$, $a < 0$; b) $\sqrt{x^{54}}$, $x < 0$; c) $\sqrt{n^{46}}$, $n < 0$; d) $\sqrt{b^{34}}$, $b < 0$.
18. Scrieți cât mai simplu: a) $\sqrt{a^{44}}$; b) $\sqrt{x^{36}}$; c) $\sqrt{n^{52}}$; d) $\sqrt{y^{16}}$.
19. Scrieți cât mai simplu:
a) $\sqrt{(x-21)^{66}}$, $x < 18$; b) $\sqrt{(a-31)^{78}}$, $a > 41$; c) $\sqrt{(x-66)^{28}}$, $x < 29,5$; d) $\sqrt{(a-71)^{54}}$, $a > 74,1$.
20. Scoateți factorii de sub radical: a) $\sqrt{a^{97}}$; b) $\sqrt{x^{59}}$; c) $\sqrt{n^{73}}$; d) $\sqrt{c^{35}}$.
21. Efectuați înmulțirile:
a) $(\sqrt{23} - 4)(39 + 4\sqrt{23})$; b) $(\sqrt{37} - 5)(62 + 5\sqrt{37})$;
c) $(\sqrt{26} - 3)(35 + 3\sqrt{26})$; d) $(\sqrt{46} - 6)(82 + 6\sqrt{46})$.
22. Efectuați calculele:
a) $(\sqrt{51} + 11)(97 - 11\sqrt{51})$; b) $(\sqrt{33} + 83)(87 - 9\sqrt{33})$; c) $(\sqrt{73} + 63)(67 - 8\sqrt{73})$;
d) $(\sqrt{39} + 99)(73 - 37\sqrt{39})$; e) $(\sqrt{95} + 99)(91 - 19\sqrt{95})$; f) $(\sqrt{34} + 99)(28 - 82\sqrt{34})$.

6. Raționalizarea numitorilor rapoartelor

- Dacă $b > 0$, atunci $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$.
- $\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b} = \frac{ac-c\sqrt{b}}{a^2-b}$; $\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c(a+\sqrt{b})}{a^2-b} = \frac{ac+c\sqrt{b}}{a^2-b}$.
- $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{c\sqrt{a}-c\sqrt{b}}{a-b}$; $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \frac{c\sqrt{a}+c\sqrt{b}}{a-b}$.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Aduceți la forma cea mai simplă: $7\sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 4\sqrt{80}$.

Rezolvare. Se ține cont că: $7\sqrt{20} = 14\sqrt{5}$; $3\sqrt{125} = 15\sqrt{5}$; $4\sqrt{80} = 16\sqrt{5}$.

Rezultă: $7\sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 4\sqrt{80} = 14\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 16\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$.

- 2) Aduceți la forma cea mai simplă: $p = \frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{28}-\sqrt{7}}{\sqrt{70}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{\sqrt{130}} + \frac{\sqrt{16}-\sqrt{13}}{\sqrt{208}}$.

Rezolvare. Se calculează suma telescopică, ținând cont că: $\frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}}$; $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{\sqrt{28}} = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{28}-\sqrt{7}}{\sqrt{70}} = \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{\sqrt{130}} = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{13}}$; $\frac{\sqrt{16}-\sqrt{13}}{\sqrt{208}} = \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{4}$. Rezultă: $p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

- 3) Aduceți la forma cea mai simplă: $m = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{195 \cdot 588}}$.

Rezolvare. Fie s rezultatul de sub radical, (1).

Se ține cont că: $\frac{1}{1 \cdot 6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3 \cdot 12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$; ..., $\frac{1}{195 \cdot 588} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{195 \cdot 196} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{195} - \frac{1}{196}\right)$, (2).

(1) și (2) $\Rightarrow s = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{195} - \frac{1}{196}\right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{196}\right) = \frac{195}{588} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{195}{588}}$.

- 4) Aflați: $p = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}} + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$.

Rezolvare. Se ține cont că: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$; $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$;

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$; ..., $\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}} = \sqrt{2024}-\sqrt{2023}$; $\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}} = \sqrt{2025}-\sqrt{2024}$.

Rezultă: $p = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{2024}-\sqrt{2023} + \sqrt{2025}-\sqrt{2024} = \sqrt{2025}-1 = 45-1 = 44$.

- 5) Aflați: $p = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2021}} + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$.

Rezolvare. Se ține cont că: $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$; ...;

$\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2021}} = \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2021}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}} = \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{2}$. Deci: $p = \frac{45-1}{2} = 22$.

■ Exerciții

- Copiași și completați propoziția adevărată: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \dots$
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{7}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{7}}$; c) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{9}{\sqrt{6}}$; e) $\frac{11}{\sqrt{13}}$; f) $\frac{12}{\sqrt{15}}$; g) $\frac{16}{\sqrt{14}}$; h) $\frac{15}{\sqrt{21}}$; i) $\frac{22}{\sqrt{26}}$; j) $\frac{24}{\sqrt{30}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{3}{\sqrt{8}}$; b) $\frac{5}{\sqrt{48}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{32}}$; d) $\frac{5}{\sqrt{18}}$; e) $\frac{8}{\sqrt{72}}$; f) $\frac{30}{\sqrt{24}}$; g) $\frac{5}{\sqrt{18}}$.
- Completați propozițiile: a) $\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \dots$; b) $\frac{c}{a-\sqrt{b}} = \dots$
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{4}{\sqrt{3}+2}$; b) $\frac{13}{\sqrt{7}+3}$; c) $\frac{15}{2+\sqrt{14}}$; d) $\frac{8}{1+\sqrt{15}}$; e) $\frac{7}{3+\sqrt{19}}$; f) $\frac{9}{11+\sqrt{19}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{6}{\sqrt{5}-2}$; b) $\frac{13}{\sqrt{7}-8}$; c) $\frac{2}{3-\sqrt{21}}$; d) $\frac{4}{11-\sqrt{23}}$; e) $\frac{3}{15-\sqrt{26}}$; f) $\frac{2}{16-\sqrt{35}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{1}{3\sqrt{3}+4}$; b) $\frac{8}{6\sqrt{7}+5}$; c) $\frac{27}{23+3\sqrt{19}}$; d) $\frac{39}{31+5\sqrt{29}}$; e) $\frac{21}{29+8\sqrt{13}}$; f) $\frac{48}{42+6\sqrt{17}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{1}{2\sqrt{3}-5}$; b) $\frac{2}{5\sqrt{2}-6}$; c) $\frac{4}{2\sqrt{7}-3}$; d) $\frac{6}{8-3\sqrt{5}}$; e) $\frac{5}{8-3\sqrt{11}}$; f) $\frac{7}{15-4\sqrt{13}}$.
- Copiași și completați propozițiile adevărate: a) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dots$; b) $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dots$
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{2}{\sqrt{23}+\sqrt{17}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{41}+\sqrt{31}}$; c) $\frac{6}{\sqrt{39}+\sqrt{21}}$; d) $\frac{5}{\sqrt{73}+\sqrt{11}}$; e) $\frac{12}{\sqrt{87}+\sqrt{77}}$; f) $\frac{11}{\sqrt{96}+\sqrt{83}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{5}{\sqrt{47}-\sqrt{33}}$; b) $\frac{4}{\sqrt{79}-\sqrt{46}}$; c) $\frac{2}{\sqrt{95}-\sqrt{21}}$; d) $\frac{6}{\sqrt{59}-\sqrt{37}}$; e) $\frac{7}{\sqrt{83}-\sqrt{66}}$; f) $\frac{7}{\sqrt{65}-\sqrt{35}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{2}{\sqrt{22}+5\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{94}+8\sqrt{5}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{341}+8\sqrt{5}}$; d) $\frac{11}{\sqrt{427}+7\sqrt{6}}$; e) $\frac{9}{\sqrt{513}+9\sqrt{5}}$; f) $\frac{13}{\sqrt{891}+6\sqrt{6}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{2}{6\sqrt{26}+5\sqrt{14}}$; b) $\frac{5}{8\sqrt{23}+3\sqrt{19}}$; c) $\frac{6}{2\sqrt{237}+7\sqrt{29}}$; d) $\frac{4}{3\sqrt{127}+8\sqrt{59}}$; e) $\frac{7}{5\sqrt{134}+6\sqrt{61}}$.
- Raționalizați numitorul raportului:
a) $\frac{3}{\sqrt{87}-7\sqrt{7}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{85}-3\sqrt{3}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{623}-8\sqrt{5}}$; d) $\frac{8}{\sqrt{427}-7\sqrt{6}}$; e) $\frac{7}{\sqrt{513}-9\sqrt{5}}$; f) $\frac{9}{\sqrt{891}-6\sqrt{6}}$.
g) $\frac{5}{6\sqrt{91}-5\sqrt{14}}$; h) $\frac{4}{2\sqrt{79}-5\sqrt{11}}$; i) $\frac{7}{2\sqrt{302}-3\sqrt{26}}$; j) $\frac{6}{3\sqrt{401}-4\sqrt{43}}$; k) $\frac{8}{4\sqrt{166}-3\sqrt{34}}$.
- Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $-6\sqrt{3}+2\sqrt{48}-5\sqrt{75}$; b) $-50\sqrt{2}-8\sqrt{50}+9\sqrt{98}$; c) $9\sqrt{3}-4\sqrt{27}-6\sqrt{75}$; d) $12\sqrt{8}-5\sqrt{32}-2\sqrt{98}$.

Sinteză

1. Aproximați cu 0,01: a) $\sqrt{42} + \sqrt{56}$; b) $\sqrt{62} + \sqrt{73}$; c) $\sqrt{21} + \sqrt{34}$; d) $\sqrt{41} + \sqrt{82}$; e) $\sqrt{305} + \sqrt{541}$.
2. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(\sqrt{83} + \sqrt{87})^2$; b) $(\sqrt{52} + \sqrt{58})^2$; c) $(\sqrt{31} + \sqrt{39})^2$; d) $(\sqrt{54} + \sqrt{56})^2$.
3. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(\sqrt{71} - \sqrt{79})^2$; b) $(\sqrt{99} - \sqrt{91})^2$; c) $(\sqrt{53} - \sqrt{57})^2$; d) $(\sqrt{99} - \sqrt{91})^2$.
4. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(2 + \sqrt{3})^3$; b) $(3 + \sqrt{5})^3$; c) $(5 + \sqrt{7})^3$; d) $(2 + \sqrt{11})^3$.
5. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(1 - \sqrt{13})^3$; b) $(2 - \sqrt{14})^3$; c) $(3 - \sqrt{17})^3$; d) $(3 - \sqrt{17})^3$.
6. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $(\sqrt{91} + \sqrt{63})(\sqrt{91} - \sqrt{63})$; b) $(\sqrt{48} + \sqrt{51})(\sqrt{48} - \sqrt{51})$.
7. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural: a) $x^{93} \cdot x^{-56} : x^{-71}$; b) $x^{77} \cdot x^{-85} : x^{-94}$.
8. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural: a) $\frac{1}{x^{37}} \cdot x^{-88} : x^{-47}$; b) $\frac{1}{a^{73}} \cdot a^{-56} : a^{-143}$.
9. Scrieți ca putere a lui 2: a) 0,125; b) 0,0625; c) 0,03125; d) 0,015625; e) 0,0078125.
10. Scrieți ca putere a lui 2 sau 5: a) $(0,0625^9 \cdot 8^{-12})^2 : 64^{22}$; b) $(0,0016^8 \cdot 125^{-11})^5 : 25^7$.
11. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $(3 + 7a^{-6})(9 - 21a^{-6} + 49a^{-12})$; b) $(5 + 6a^{-9})(25 - 30a^{-9} + 36a^{-18})$.
12. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $(4a^{-3} - 5b^{-4})(8a^{-6} + 20a^{-3}b^{-4} + 81b^{-8})$; b) $(2a^{-5} - 7b^{-7})(4a^{-10} + 14a^{-5}b^{-7} + 49b^{-14})$.
13. Introduceți factorii sub radical: a) $-5\sqrt{43}$; b) $-7\sqrt{51}$; c) $-3\sqrt{31}$; d) $-6\sqrt{43}$; e) $-8\sqrt{54}$.
14. Efectuați: a) $\sqrt{11}(\sqrt{15} - \sqrt{19})$; b) $\sqrt{11}(\sqrt{37} - \sqrt{29})$; c) $\sqrt{11}(\sqrt{56} - \sqrt{42})$; d) $\sqrt{11}(\sqrt{73} - \sqrt{63})$.
15. Ordonăți crescător: a) $14\sqrt{7}, 22\sqrt{3}, 9\sqrt{46}$; b) $31\sqrt{3}, 19\sqrt{7}, 6\sqrt{69}$.
16. Introduceți factorii sub radical: a) $a^{35}\sqrt{28}, a < 0$; b) $b^{97}\sqrt{32}, b < 0$; c) $c^{175}\sqrt{13}, c < 0$.
17. Efectuați: a) $(\sqrt{37} + \sqrt{19})^3$; b) $(\sqrt{39} + \sqrt{57})^3$; c) $(\sqrt{71} + \sqrt{21})^3$; d) $(\sqrt{86} + \sqrt{54})^3$.
18. Efectuați: a) $(\sqrt{65} - \sqrt{47})^3$; b) $(\sqrt{85} - \sqrt{73})^3$; c) $(\sqrt{46} - \sqrt{21})^3$; d) $(\sqrt{77} - \sqrt{61})^3$.
19. Scoateți factorii de sub radical: a) $\sqrt{1395}$; b) $\sqrt{3408}$; c) $\sqrt{2296}$.
20. Scrieți mai simplu: a) $\sqrt{a^{58}}, a < 0$; b) $\sqrt{x^{34}}, x < 0$; c) $\sqrt{y^{98}}, y < 0$.
21. Scrieți mai simplu: a) $\sqrt{(x - 53)^{78}}, x < 53$; b) $\sqrt{(a - 67)^{46}}, a > 67$; c) $\sqrt{(34 - y)^{98}}, y > 34$.
22. Aduceți la forma cea mai simplă expresia: a) $(\sqrt{17} - 5)(42 + 5\sqrt{17})$; b) $(\sqrt{42} - 8)(108 + 8\sqrt{42})$.
23. Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{12}{\sqrt{28}}$; b) $\frac{9}{\sqrt{18}}$; c) $\frac{12}{\sqrt{72}}$.
24. Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{3}{5 + \sqrt{47}}$; b) $\frac{7}{8 + \sqrt{76}}$; c) $\frac{19}{4 + \sqrt{87}}$.
25. Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{3}{5 - \sqrt{47}}$; b) $\frac{7}{8 - \sqrt{76}}$; c) $\frac{19}{4 - \sqrt{87}}$.
26. Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{20}{\sqrt{37} + \sqrt{22}}$; b) $\frac{24}{\sqrt{83} + \sqrt{67}}$.
27. Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{22}{\sqrt{101} - \sqrt{85}}$; b) $\frac{36}{\sqrt{115} - \sqrt{88}}$.
28. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $-2\sqrt{847} + 4\sqrt{252} - 3\sqrt{1\,008}$; b) $-7\sqrt{704} + 13\sqrt{2\,156} - 18\sqrt{2\,475}$.

Evaluare

I

1. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural:

$$x^{104} \cdot x^{-62} : x^{-38}.$$

2. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$(\sqrt{59} - \sqrt{91})^2.$$

3. Scrieți ca putere a lui 2 sau 5:

$$(0,0625^{11} \cdot 16^{-17})^2 : 64^{24}.$$

4. Aplicând o formulă, efectuați:

$$(\sqrt{23} - 12)(167 + 12\sqrt{23}).$$

5. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$-7\sqrt{704} + 14\sqrt{539} - 15\sqrt{891}.$$

6. Raționalizați numitorul raportului:

$$\frac{46}{\sqrt{101} - \sqrt{78}}.$$

II

1. Scrieți ca putere cu exponentul număr natural:

$$x^{112} \cdot x^{-44} : x^{-71}.$$

2. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$(\sqrt{65} - \sqrt{85})^2.$$

3. Scrieți ca putere a lui 2 sau 5:

$$(0,0625^{12} \cdot 16^{-19})^2 : 64^{31}.$$

4. Aplicând o formulă, efectuați:

$$(\sqrt{26} - 13)(195 + 13\sqrt{26}).$$

5. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$-19\sqrt{637} + 32\sqrt{468} - 22\sqrt{1053}.$$

6. Raționalizați numitorul raportului:

$$\frac{56}{\sqrt{127} - \sqrt{99}}.$$

Puncte	0–5	6–24	24–32	33–55	56–65	66–75	76–85	86–95	96–100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Din istoria matematicii

Numerele naturale au fost utilizate înainte de fracții. Conform unor date, fracțiile se utilizau cu 2000 de ani î.Hr. În lucrările lui Arhimede (287–212 î.Hr.) se întâlnesc fracții cu numitorii numere naturale, dar nu se folosește linia de fracție. În *Liber abaci* (*Cartea abacului*), apărută în 1202, L. Fibonacci (1170–1250) a folosit pentru prima dată linia de fracție. Deși calculele cu fracții erau cunoscute de greci încă din antichitate, ele nu erau considerate numere. Abia în 1707, I. Newton (1643–1727) consideră în cartea sa *Aritmetica universală* (1707) fracțiile ca fiind numere. Linia de fracție înseamnă împărțirea număratorului la numitor. În general, linia de fracție se folosește la scrierea raportului a două expresii algebrice.

Se știe că numerele întregi erau utilizate de indieni în secolul VII. Mult timp se efectuau numai adunări și scăderi. Abia în secolul XVII, după introducerea sistemului de coordonate de către Descartes (1595–1650), numerele întregi negative sunt recunoscute și utilizate ca și cele pozitive.

Numerele iraționale au fost desoperite din Antichitate. În secolul VI î.Hr., școala lui Pitagora a descoperit că diagonală și latura pătratului sunt mărimi incomensurabile.

L. Euler (1707–1783) și I. Lambert (1728–1777) au demonstrat că numerele zecimale periodice sunt raționale (reprezentate prin fracții). K. Weierstrass (1815–1897) a construit numerele reale utilizând numere zecimale periodice și cele neperiodice infinite (numere iraționale).

Suplimentar

1. a) Demonstrați că: $\overline{a, (bc)} = a + \frac{bc}{99}$. b) Generalizați rezultatul de la a).
2. a) Demonstrați că: $\overline{a, bc(def)} = a + \frac{bcdef - bc}{99900}$. b) Generalizați rezultatul de la a).
3. Fie ecuația de gradul II cu coeficienți reali $ax^2 + 2b_1x + c = 0$. Demonstrați propoziția:
Dacă $\Delta_1 > 0$, unde $\Delta_1 = (b_1)^2 - ac$, atunci $x_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta_1}}{a}$ și $x_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta_1}}{a}$.
4. Fie șirul 1, 2, 3, ..., 2 025. Micșorați opt termeni ai șirului cu 1. Procedând la fel de un număr suficient de ori, se poate obține din șirul inițial un șir cu toți termenii 0?
5. Fie numărul $a = 0,21211123112...$. Construiți un număr irațional b cu proprietatea că $c = a + b$ este un număr rațional.
6. Aflați numărul $c = m - p$, dacă:
a) $m = 2, (1)$ și $p = 0,101001000100001...$; b) $m = 5, (3)$ și $p = 0,03003000300003...$
7. Fie punctul M situat între A și B , astfel încât $AM < MB$.

Aflați numărul de aur, știind că el este valoarea raportului $\frac{AB}{MB}$ dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{MB}{AB}$.
8. Comparați numărul de aur cu numărul $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$.
9. Fie numerele naturale nenule n , $n + 1$ și $n + 2$. Ce tip de număr zecimal este suma inverselor celor trei numere?
10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\frac{x}{5} + \frac{x+1}{6} + \frac{x+2}{7} + \dots + \frac{x+2008}{2013} = 2009$.
11. (Teorema lui McKay) Fie $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Demonstrați că $\frac{a+c}{b+d}$ este un număr ce se află între cele două numere date.
12. Demonstrați că orice număr întreg de forma $19n^4 + 2$ este suma a patru pătrate perfecte.
13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $|5x - |2x - 3|| = 12$.
14. Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{13}{16} \cdot \frac{19}{22} \cdot \dots \cdot \frac{2005}{2008} < \frac{1}{\sqrt{2011}}$.
15. Decideți dacă există numerele întregi x și y pentru care: $(5x + 4)^{1344} + (2y - 9)^{1328} = 2 \cdot 578^{7833}$.
16. Ordinul unui număr natural n este $o(n)$, numărul cifrelor lui n . Aflați $o(o(n))$, dacă $n = 2^{2009}$.
17. Aflați exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului $2 \cdot 009!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
18. Demonstrați propoziția: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}$.
19. Fie intervalul (a, b) și $t \in (0, 1)$. Demonstrați că $p \in (a, b)$, unde $p = at + (1 - t)b$.
20. Scrieți cât mai simplu: $s = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 101 \cdot 2^{100}$.
21. Completați $25^2 = \dots$, știind că: $1^2 = 1$; $3^2 = 2 + 3 + 4$; $5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.
22. Calculați rapid: a) 101^2 ; b) $1\ 002^2$; c) $10\ 003^2$; d) $100\ 004^2$; e) $1\ 000\ 005^2$.
23. Model de calcul rapid. $31 \cdot 39 = 1\ 209$ deoarece $1 + 9 = 10$, se calculează $3 \cdot 4 = 12$ și $1 \cdot 9 = 9$ și se scrie rezultatul: 1 209. Calculați după model: a) $72 \cdot 78$; b) $1\ 013 \cdot 1\ 017$.
24. Ordinul unui număr natural n este $o(n)$ este numărul cifrelor lui n . Aflați $o(o(n))$, dacă $n = 2^{2009}$.

Pentru concursuri

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski

Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ și $b_1, b_2, \dots, b_n$ este adevărată propoziția:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Demonstrație. Deoarece suma pătratelor oricăror numere reale este un număr pozitiv, atunci pentru orice t este adevărată inegalitatea: $(a_1 - t b_1)^2 + (a_2 - t b_2)^2 + \dots + (a_n - t b_n)^2 \geq 0$.

După desfacerea parantezelor și gruparea termenilor se obține:

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)t^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)t + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq 0.$$

Fie funcția de gradul II de forma

$$f(t) = (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)t^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)t + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

$f(t) \geq 0$ dacă și numai dacă are discriminantul $\Delta \leq 0$. Prin urmare,

$$4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0,$$

de unde $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$.

Egalitatea se realizează pentru zeroul t_0 al funcției f . $(a_1 - t_0 b_1)^2 + (a_2 - t_0 b_2)^2 + \dots + (a_n - t_0 b_n)^2 = 0$,

dacă fiecare termen al sumei este egal cu 0. Rezultă $t_0 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

■ Exerciții

1. Demonstrați că pentru orice numere pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ este adevărată propoziția:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Rezolvare. Se aplică inegalitatea mediilor și rezultă:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ și } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} \text{ implică}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

2. Demonstrați că pentru orice numere reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt adevărate propozițiile:

a) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$;

b) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$;

c) dacă $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ și $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$, atunci: $-1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq 1$.

Rezolvare. a) $2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + \dots + 2x_{n-1} x_n + 2x_n x_1 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_n^2 \Leftrightarrow$

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 x_3 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 - 2x_{n-1} x_n + x_n^2 + x_1^2 - 2x_n x_1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Ultima inegalitate este adevărată, deci și cea inițială este adevărată.

b) Rezultă din inegalitatea de la punctul a).

c) În inegalitatea $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$ se înlocuiește $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ și $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ și rezultă:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq 1, \text{ de unde } -1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq 1.$$

Rapoarte algebrice

1. Noțiunea de raport algebric

Fie expresiile: $9a^3 - 5a^2b + 5,8b^5$, $(3m^6 + 9n^3)(49m^{11} - 28m^3n + 16b^4)$, $\frac{4x^2 - 15x + 25}{8}$, $(12p^8 - 5q^9) :$
 $(144p^{18} + 60p^9q^4 + 25q^5)$, $\frac{5a^5 - 91b^3 + 29}{21a + 2b^2}$.

Dintre expresiile enumerate mai sus, numai $\frac{5a^5 - 91b^3 + 29}{21a + 2b^2}$ este un raport algebric.

Un **raport algebric** are numitorul și numărătorul expresii algebrice care conțin variabile.

Fie raportul $\frac{2a^2 - 9b}{3a + 2b^2}$. Pentru $a = 3$ și $b = -2$, **valoarea raportului** este $\frac{2 \cdot 3^2 - 9(-2)}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4} = \frac{18 + 18}{9 + 8} = \frac{36}{17} = 2\frac{2}{17}$. Valoarea unui raport se calculează numai pentru valorile variabilelor pentru care numitorul raportului are valoarea un număr diferit de 0.

Fie raportul $\frac{3x^3 - 2x}{x + 5}$. Pentru $x = -5$, numitorul raportului are valoarea 0. **Domeniul valorilor admisibile** (DVA) al raportului este $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Descompunerea în produs a unei expresii algebrice

- $35x^4y^5 - 25x^3y^7 - 5x^2y^9 = 5x^2y^5(7x^2 - 5xy^2 - y^4)$.
- $(x + 3)^3 - 2(x + 3)^2 - 3x(x + 3) = (x + 3)[(x + 3)^2 - 2(x + 3) - 3x] = (x + 3)(x^2 + 6x + 9 - 2x - 6 - 3x) = (x + 3)(x^2 + x + 3)$.
- $x(2x - 3y)^4 - 5x^2(2x - 3y)^3 = x(2x - 3y)^3(2x - 3y - 5x) = x(2x - 3y)^3(-3x - 3y) = -3x(2x - 3y)^3(x + y)$.
- $3x^2 - 2xy + 3xy^2 - 2y^3 = (3x^2 - 2xy) + (3xy^2 - 2y^3) = x(3x - 2y) + y^2(3x - 2y) = (3x - 2y)(x + y^2)$.
- $9x^2 + 6xy - 3xz - 6xy^2 - 4y^3 + 2zy^2 = (9x^2 + 6xy - 3xz) - (6xy^2 + 4y^3 - 2zy^2) = 3x(3x + 2y - z) - 2y^2(3x + 2y - z) = (3x + 2y - z)(3x + 2y^2)$.
- $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b)$.
- $x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5 = (x^2 + 5x) + (x + 5) = x(x + 5) + (x + 5) = (x + 5)(x + 1)$.
- $6x^2 - x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1 = (6x^2 - 3x) + (2x - 1) = 3x(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(3x + 1)$.
- $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2 = (2x + 3)^2$.
- $3x^2 - 14\sqrt{3}x + 49 = (\sqrt{3}x)^2 - 2(\sqrt{3}x)(7) + (7)^2 = (\sqrt{3}x - 7)^2$.
- $125x^3 + 225x^2 + 135x + 27 = (5x)^3 + 3(5x)^2(3) + 3(5x)(3)^2 + (3)^3 = (5x + 3)^3$.
- $216x^3 - 756x^2y + 882xy^2 - 343y^3 = (6x)^3 - 3(6x)^2(7y) + 3(6x)(7y)^2 - (7y)^3 = (6x - 7y)^3$.
- $256x^2 - 49y^2 = (16x + 7y)(16x - 7y)$.
- $729x^3 + 64 = (9x + 4)(81x^2 - 36x + 16)$.
- $125y^3 - 216 = (5y - 6)(25y^2 + 30y + 36)$.

■ Exerciții

- Enumerați numărătorul și numitorul fiecărui raport algebric: a) $\frac{2x^2 - 3x + 4}{x + 2}$; b) $\frac{3a^4 - 71a^3 + 31}{5a - 72b}$.
- Aflați DVA în $\mathbb{R}$ pentru: a) $\frac{5x^3 - 2x}{x + 3}$; b) $\frac{a^3 - 9a}{2a - 5}$; c) $\frac{3x + 4}{x^2 - 3x + 2}$; d) $\frac{7z + 5}{z^2 - 3z + 5}$.
- Descompuneți în factori: a) $4x^3 - 2x^2$; b) $9x^8 - 15x^7$; c) $15x^{13} + 2x^{11}$; d) $38x^{27} + 17x^{25}$; e) $35y^{25} - 7y^{24}$.
- Descompuneți în factori: a) $3x(x + 2) - 11(x + 2)$;
 b) $6x(3x + 5) - 51(3x + 5)$; c) $8x(5x + 9) - 17(5x + 9)$; d) $15x(3x + 7) - 11(3x + 7)$.

5. Descompuneți în factori: a) $2x^2(3x-2) - 15x(3x-2)$;
b) $4y^2(5y-6) - 7y(5y-6)$; c) $7x^2(11x-9) - 3x(11x-9)$; d) $22y^2(8y-3) - 3y(8y-3)$.
6. Descompuneți în factori: a) $(3x-5y)^2 - (3x-5y)$;
b) $(8x-3y)^2 - (8x-3y)$; c) $(5y-8z)^2 - (5y-8z)$; d) $(3m-7p)^2 - (3m-7p)$.
7. Descompuneți în factori: a) $3(31x-13m)^2 - (31x-13m)$;
b) $6(5x-13y)^2 - (5x-13y)$; c) $9(8m-9p)^2 - (8m-9p)$; d) $11(7x-6z)^2 - (7x-6z)$.
8. Descompuneți în factori: a) $3x(y+5) - 2y(y+5) + 9(y+5)$; b) $2x(a-3) - 4y(a-3) + 3(a-3)$;
c) $8x(z-9) - 5y(z-9) + 9(z-9)$; d) $7z(z+2) - 9y(z+2) + 27(z+2)$.
9. Descompuneți în factori: a) $3a(x+15y) - 2b(x+15y)$; b) $2p(3a+13b) - 9p(3a+13b)$;
c) $18a(3c+7d-4) - 13b(3c+7d-4)$; d) $24x(m+6p-9) - 23y(m+6p-9)$.
10. Descompuneți în factori: a) $3(6x-5y)^2 - 8p(6x-5y)$; b) $12(9m+13p)^2 - 7b(9m+13p)$;
c) $17(15a+8b-d)^2 - 19p(15a+8b-d)$; d) $41(5x+9y-3z)^2 - 15a(5x+9y-3z)$.
11. Descompuneți în factori: a) $4a(m^2+2p-4) - 5b(m^2+2p-4)$;
b) $7p(c^2+3) - 4q(c^2+3)$; c) $5x(x^2+4) - 7z(x^2+4)$; d) $8y(y^2+4) - 2z(y^2+4)$.
12. Descompuneți în factori: a) $2(b^2+8)^2 - 5y(b^2+8)$;
b) $3(x^3+7)^2 - 8y(x^3+7)$; c) $6(m^5+9)^2 - 2p(m^5+9)$; d) $17(a^4+11)^2 - 19b(a^4+11)$.
13. Descompuneți în factori: a) $3(a^2+a+6)^2 - 5x(a^2+a+6)$; b) $8(p^2+p+5)^2 - 2z(p^2+p+5)$;
c) $5a(p^2-p+1)^2 - 3y(p^2-p+1)$; d) $23y(n^2+n+1)^2 - 43z(n^2+n+1)$.
14. Descompuneți în factori: a) $3x(9x+2y-11z) - 35y(9x+2y-11z)$; b) $7x(x+11y) - 9y(x+11y)$;
c) $11a(b+29c) - 15z(b+29c)$; d) $37x(3a+8b) - 51y(3a+8b)$.
15. Descompuneți în factori: a) $3x^2 + 6xy + 2xy + 4y^2$;
b) $5x^2 + 10xy + 5xy + 10y^2$; c) $12x^2 + 3xy + 8xy + 2y^2$; d) $7x^3 + 14x^2y + 7xy + 14y^2$.
16. Descompuneți în factori: a) $3x^2 - 9xy + 6xy - 18y^2$; b) $2x^2 - 12xy + 5xy - 30y^2$;
c) $15x^3 - 3x^2y + 25xy - 5y^2$; d) $8x^3 - 24x^2y + 7xy - 21y^2$.
17. Descompuneți în factori: a) $3a^3 + 2a^2b - 6ab - 4b^2$; b) $2a^3 + 14a^2b - 5ab - 35b^2$;
c) $18a^4 - 3a^3b + 30ab - 5b^2$; d) $36a^3 - 12a^2b + 63ab - 21b^2$.
18. Descompuneți în factori: a) $4m^3 - 5m^2n - 12mn^3 + 15n^4$;
b) $33p^3 - 11p^2q - 24pq^3 + 8q^4$; c) $3a^3 - 7a^2b - 9ab^3 + 21b^4$; d) $4a^3 - 5a^2b - 16ab^3 + 20b^4$.
19. Descompuneți în factori: a) $p^3 - 2p^2 + 3p + p^2q - 2pq + 3q$; b) $m^3 - 3m^2 + 5m + 2m^2n - 6mn - 10m$;
c) $a^3 - 4a^2 + 9a + 3a^2b - 12ab - 27b$; d) $5p^3 - 2p^2 + 3p + 15p^2q - 6pq + 9q$.
20. Descompuneți în factori: a) $x^2 + 11x + 28$; b) $x^2 + 12x + 35$; c) $x^2 + 19x + 90$; d) $x^2 + 23x + 60$.
21. Restrângeți: a) $m^2 - 2\sqrt{7}m + 7$; b) $p^2 - 2\sqrt{5}p + 5$; c) $q^2 - 2\sqrt{6}q + 6$; d) $n^2 - 2\sqrt{3}n + 3$.
22. Descompuneți în factori: a) $x^4 - 4y^4$; b) $4x^4 - 9y^4$; c) $16y^4 - z^4$; d) $a^4 - 81b^4$.
23. Descompuneți în factori: a) $p^6 + 6p^4q + 12p^2q^2 + 8q^3$;
b) $m^{12} + 9m^8n + 27m^4n^2 + 27n^3$; c) $64a^9 + 48a^6b + 12a^3b^2 + b^3$; d) $c^3 + 15c^2d^3 + 75cd^6 + 125d^9$.
24. Descompuneți în factori: a) $343x^6 - 147x^4y + 21x^2y^2 - y^3$;
b) $y^3 - 12yz^2 + 48y^2z^4 - 64z^6$; c) $216m^3 - 108m^2n + 18m^2n^6 - n^9$; d) $n^9 - 15n^4p + 75n^2p^2 - 125p^3$.
25. Descompuneți în factori: a) $1331u^6 - 8v^3$; b) $343p^6 - 27q^3$; c) $125d^3 - 64e^3$; d) $64e^3 - 27d^9$.
26. Descompuneți în factori: a) $216a^9 + 8b^6$; b) $64c^9 + 27d^3$; c) $343m^3 + 8n^6$; d) $125n^3 + 64p^9$.
27. Descompuneți în factori: a) $729x^6 + 54x^3 + 1$; b) $64y^6 + 16y^3 + 1$; c) $z^{12} + 16z^6 + 64$; d) $u^{12} + 2u^6v^{12} + v^{24}$.
28. Descompuneți în factori: a) $x^{24} - 2x^{12}y^6 + y^{12}$; b) $x^6 - 54x^3 + 729$; c) $x^{24}y^{12} - 2x^{12}y^6 + 1$.
29. Descompuneți în factori: a) $p^4 - 5p^2 + 6$; b) $q^4 - 7q^2 + 12$; c) $m^4 - 9m^2 + 18$; d) $n^4 - 11n^2 + 28$.
30. Descompuneți în factori: a) $m^6 - 28m^3 + 27$; b) $n^6 - 7n^3 - 8$; c) $p^6 - 26p^3 - 27$; d) $q^6 + 19q^3 - 216$.
31. Descompuneți în factori: a) $x^8 - 29x^4 + 100$; b) $x^8 - 13x^4 + 36$; c) $x^8 - 25x^4 + 144$; d) $x^8 - 41x^4 + 400$.

2. Amplificarea rapoartelor. Simplificarea rapoartelor

• **Amplificarea rapoartelor.** Amplificarea unui raport constă în înmulțirea cu aceeași expresie a numărătorului și a numitorului raportului. Rezultatul amplificării unui raport este un raport egal cu raportul inițial în domeniul valorilor admisibile pentru ambele rapoarte.

$\frac{3x}{x+5} = \frac{3x(x+6)}{(x+5)(x+6)} = \frac{3x^2+8x}{x^2+11x+30}$ pentru DVA = $\mathbb{R} \setminus \{-6, -5\}$. $\mathbb{R} \setminus \{-6, -5\}$ este DVA pentru primul raport.

• **Simplificarea rapoartelor.** Simplificarea unui raport constă în împărțirea la aceeași expresie a numărătorului și a numitorului raportului. Rezultatul simplificării unui raport este un raport egal cu raportul inițial în domeniul valorilor admisibile pentru ambele rapoarte.

■ Exerciții rezolvate

- 1) $\frac{72x^5y^7z^9(9x^5y^7z^5)}{81x^6y^9z^5} = \frac{8z^4}{9xy^2}$.
- 2) $\frac{5x^2-3x+7}{15x^3-9x^2+21x} = \frac{5x^2-3x+7}{3x(5x^2-3x+7)} \stackrel{(5x^2-3x+7)}{=} \frac{1}{3x}$.
- 3) $\frac{4x^4-25}{4x^4-20x^2+25} = \frac{(2x^2+5)(2x^2-5)}{(2x^2-5)^2} \stackrel{(2x^2+5)}{=} \frac{2x^2+5}{2x^2-5}$.
- 4) $\frac{9x^6-121}{27x^9-297x^6+1089x^3-1331} = \frac{(3x^3+1)(3x^3-1)}{(3x^3-1)^3} \stackrel{(3x^3+1)}{=} \frac{3x^3+1}{(3x^3-1)^2}$.
- 5) $\frac{4x^8-28x^4+48}{8x^{12}-84x^8+294x^4-331} = \frac{(2x^4-7)^2}{(2x^4-7)^3} \stackrel{2((2x^4-7)^2)}{=} \frac{1}{2x^4-7}$.
- 6) $\frac{125x^6-8y^3}{125x^6-150x^4y+60x^2y^2-8y^3} = \frac{(5x^2-2y)(25x^4+10x^2y+4y^2)}{(5x^2-2y)^3} \stackrel{(5x^2-2y)}{=} \frac{25x^4+10x^2y+4y^2}{25x^4-20x^2y+4y^2}$.
- 7) $\frac{x^2+23x+42}{x^2+24x+63} = \frac{x^2+(21+2)x+21 \cdot 2}{x^2+(21+3)x+21 \cdot 3} = \frac{x^2+21x+2x+21 \cdot 2}{x^2+21x+2x+21 \cdot 3} = \frac{x(x+21)+2(x+21)}{x(x+21)+3(x+21)} = \frac{(x+21)(x+2)}{(x+21)(x+3)} \stackrel{(x+21)}{=} \frac{x+2}{x+3}$.
- 8) $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x+ac} = \frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2+ax+cx+ac} = \frac{x(x+a)+b(x+a)}{x(x+a)+c(x+a)} = \frac{(x+a)(x+b)}{(x+a)(x+c)} \stackrel{(x+a)}{=} \frac{x+b}{x+c}$.
- 9) $\frac{x^2-18x+65}{x^2-20x+91} = \frac{x^2-(13+5)x+13 \cdot 5}{x^2-(13+7)x+13 \cdot 7} = \frac{x^2-13x-5x+13 \cdot 5}{x^2-13x-7x+13 \cdot 7} = \frac{x(x-13)-5(x-13)}{x(x-13)-7(x-13)} = \frac{(x-13)(x-5)}{(x-13)(x-7)} \stackrel{(x-13)}{=} \frac{x-5}{x-7}$.
- 10) $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac} = \frac{x^2-ax-bx+ab}{x^2-ax-cx+ac} = \frac{x(x-a)-b(x-a)}{x(x-a)-c(x-a)} = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-c)} \stackrel{(x-a)}{=} \frac{x-b}{x-c}$.
- 11) $\frac{x^2+11x-42}{x^2+9x-60} = \frac{x^2+(14-3)x-14 \cdot 3}{x^2+(14-5)x-14 \cdot 5} = \frac{x^2+14x-3x-14 \cdot 3}{x^2+14x-5x-14 \cdot 5} = \frac{x(x+14)-3(x+14)}{x(x+14)-5(x+14)} = \frac{(x+14)(x-3)}{(x+14)(x-5)} \stackrel{(x+14)}{=} \frac{x-3}{x-5}$.
- 12) $\frac{x^2+(a-b)x-ab}{x^2+(a-c)x-ac} = \frac{x^2+ax-bx-ab}{x^2+ax-cx-ac} = \frac{x(x+a)-b(x+a)}{x(x+a)-c(x+a)} = \frac{(x+a)(x-b)}{(x+a)(x-c)} \stackrel{(x+a)}{=} \frac{x-b}{x-c}$.
- 13) $\frac{x^2-13x-68}{x^2-12x-85} = \frac{x^2-(17-4)x-17 \cdot 4}{x^2-(17-5)x-17 \cdot 5} = \frac{x^2-17x+4x-17 \cdot 4}{x^2-17x+5x-17 \cdot 5} = \frac{x(x-17)+3(x-17)}{x(x-17)+5(x-17)} = \frac{(x-17)(x+3)}{(x-17)(x+5)} \stackrel{(x-17)}{=} \frac{x+3}{x+5}$.

$$14) \frac{x^2 - (a-b)x - ab}{x^2 - (a-c)x - ac} = \frac{x^2 - ax + bx - ab}{x^2 - ax + cx - ac} = \frac{x(x-a) + b(x-a)}{x(x-a) + c(x-a)} = \frac{(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+c)} \stackrel{(x-a)}{=} \frac{x+b}{x+c}.$$

■ Exerciții

- Simplificați rapoartele: a) $\frac{12x^2y^4}{44x^9y^3}$; b) $\frac{15x^8y^6}{35x^5y^9}$; c) $\frac{18x^9y^2}{48x^8y^{11}}$; d) $\frac{36x^{19}y^8}{81x^{21}y^{39}}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{3x+8}{12x^2+32x}$; b) $\frac{7x-5}{35x^2-25x}$; c) $\frac{12x^9-11}{48x^{11}-44x^6}$; d) $\frac{8x-9}{56x^2-63x}$; e) $\frac{13x^3-2}{91x^9-14x^6}$; f) $\frac{17x^7+13}{68x^{12}+52x^5}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{9ab+15b}{21ab+45b}$; b) $\frac{8m+28n}{18mn+63n}$; c) $\frac{6z^2+8z}{27az+36a}$; d) $\frac{21x^2+35x}{24xz^5+40z^5}$; e) $\frac{13a^3+17a^2}{104ay^9+157y^9}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{16m^2-n^2}{16m^2-8mn+n^2}$; b) $\frac{64a^2-9b^2}{64a^2-48ab+9b^2}$; c) $\frac{25c^4-16d^4}{25c^4-40c^2d^2+16d^4}$;
 - $\frac{49a^6-36b^6}{49a^6-84a^3b^3+36b^6}$; e) $\frac{81a^6-64b^6}{81a^6-144a^3b^3+64b^6}$; e) $\frac{25b^{10}-121c^8}{25a^{10}-110a^5b^4+121b^8}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{16x^4-54x}{12x^2y-36xy+27y}$; b) $\frac{135x^4-40x}{63x^2z-84xz+28z}$; c) $\frac{192m^3-108m}{80m^2n-120mn+45m}$;
 - $\frac{64a^7+125a}{80a^4d+100a^2d+125d}$; e) $\frac{1\ 536ax^{12}-81a}{128cx^8-96cx^4+18c}$; f) $\frac{216a^{10}-343a}{72a^6b-168a^3b+98b}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{a+2b}{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}$; b) $\frac{x+3y}{x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3}$; c) $\frac{m+4p}{m^3+12m^2p+48mp^2+64p^3}$;
 - $\frac{n+5q}{n^3+15n^2q+75nq^2+125q^3}$; e) $\frac{m+6n}{n^3+18m^2n+108mn^2+216n^3}$; f) $\frac{n+7c}{n^3+21n^2c+147nc^2+343c^3}$.
- Simplificați rapoartele:
 - $\frac{a-3b}{a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3}$; b) $\frac{2x-y}{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}$; c) $\frac{4m-p}{64m^3-48m^2p+12mp^2-p^3}$;
 - $\frac{5n-q}{125n^3-75n^2q+15nq^2-q^3}$; e) $\frac{8a-z}{512a^3-144a^2z+24az^2-z^3}$; f) $\frac{9m-n}{729m^3-243m^2n+27mn^2-n^3}$.
- Simplificați fracția algebrică:
 - $\frac{25a^2-b^2}{125a^3+75a^2b+15ab^2+b^3}$; b) $\frac{16m^2-p^2}{64m^3-48m^2p+12mp^2-p^3}$; c) $\frac{9x^2-y^2}{27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3}$;
 - $\frac{49n^2-q^2}{343n^3-147n^2q+21nq^2-q^3}$; e) $\frac{c^2-64b^2}{c^3-24c^2b+144cb^2-512b^3}$; f) $\frac{a^2-81m^2}{a^3-27a^2m+243am^2-729n^3}$.
- Simplificați fracția algebrică:
 - $\frac{9a^2-24ab+16b^2}{27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3}$; b) $\frac{16m^2-24mp+9p^2}{64m^3-144m^2p+108mp^2-27p^3}$;
 - $\frac{9x^2-30xy+25y^2}{27x^3-145x^2y+225xy^2-125y^3}$; d) $\frac{49n^2-28nq+4q^2}{343n^3-294n^2q+84nq^2-8q^3}$.
- Simplificați rapoartele: a) $\frac{9a^4+42a^2b+49b^2}{27a^6+189a^4b+441a^2b^2+343b^3}$; b) $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$;
- $\frac{4m^4+20m^2n+25n^2}{8m^6+60m^4n+150m^2n^2+125n^3}$; d) $\frac{25m^4+40m^2n+16n^2}{125m^6+300m^4n+240m^2n^2+64n^3}$.

- 11.** Simplificați rapoartele: a) $\frac{64a^6 - 27b^3}{64a^6 - 144a^4b + 108a^2b^2 - 27b^3}$; b) $\frac{27a^3 - 125b^6}{27a^3 - 135a^2b^2 + 225ab^4 - 125b^6}$;
c) $\frac{125a^3 - 64b^6}{125a^3 - 300a^2b^2 + 240ab^4 - 64b^6}$; d) $\frac{343a^6 - 64b^3}{343a^6 - 588a^4b + 336a^2b^2 - 64b^3}$.
- 12.** Simplificați rapoartele: a) $\frac{512m^5 - 216n^2}{192m^3n - 432m^2n + 324mn - 81n}$; b) $\frac{625m^7 - 5mn^2}{750m^6 - 450m^4n^2 + 90m^2n^3 - 6n^4}$;
c) $\frac{448m^{10} - 7mn^3}{192m^9n - 144m^6n^2 + 36m^3n^3 - 3n^4}$; d) $\frac{135m^7 - 5mn^3}{108m^6n - 108m^4n^2 + 36m^2n^3 - 4n^4}$.
- 13.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 11x + 28}$; b) $\frac{x^2 + 13x + 22}{x^2 + 15x + 44}$; c) $\frac{x^2 + 14x + 33}{x^2 + 18x + 77}$; d) $\frac{x^2 + 16x + 48}{x^2 + 18x + 72}$; e) $\frac{x^2 + 17x + 42}{x^2 + 19x + 70}$.
- 14.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 - 13x + 42}{x^2 - 16x + 63}$; b) $\frac{x^2 - 21x + 54}{x^2 - 23x + 90}$; c) $\frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 - 14x + 45}$; d) $\frac{x^2 - 16x + 63}{x^2 - 20x + 91}$; e) $\frac{x^2 - 22x + 57}{x^2 - 24x + 95}$.
- 15.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 + 21x - 46}{x^2 + 18x - 115}$; b) $\frac{x^2 + 23x - 78}{x^2 + 21x - 130}$; c) $\frac{x^2 + 23x - 102}{x^2 + 21x - 163}$; d) $\frac{x^2 + 19x - 120}{x^2 + 20x - 96}$; e) $\frac{x^2 + 21x - 162}{x^2 + 18x - 243}$.
- 16.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 - 13x - 68}{x^2 - 12x - 85}$; b) $\frac{x^2 - 18x - 175}{x^2 - 12x - 225}$; c) $\frac{x^2 - 18x - 243}{x^2 - 16x - 297}$; d) $\frac{x^2 - 21x - 310}{x^2 - 26x - 155}$; e) $\frac{x^2 - 19x - 416}{x^2 - 22x - 320}$.
- 17.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 + 14x + 49}$; b) $\frac{x^2 + 13x + 40}{x^2 + 16x + 64}$; c) $\frac{x^2 + 14x + 45}{x^2 + 10x + 25}$; d) $\frac{x^2 + 16x + 63}{x^2 + 18x + 81}$; e) $\frac{x^2 + 17x + 55}{x^2 + 22x + 121}$.
- 18.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^3 - 125}{x^2 - 12x + 35}$; b) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 15x + 26}$; c) $\frac{x^3 - 64}{x^2 - 18x + 80}$; d) $\frac{x^3 - 27}{x^2 - 18x + 45}$; e) $\frac{x^3 - 343}{x^2 - 13x + 42}$.
- 19.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - 16x + 63}$; b) $\frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 19x + 78}$; c) $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 20x + 91}$; d) $\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 28x + 187}$; e) $\frac{x^2 - 26x + 169}{x^2 - 15x + 26}$.
- 20.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{a^2 + 6a + 5}{a^3 + 15a^2 + 75a + 125}$; b) $\frac{m^2 + 7m + 6}{m^3 + 18m^2 + 108m + 216}$; c) $\frac{b^2 + 8b + 7}{b^3 + 21b^2 + 147b + 343}$.
- 21.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{2a^2 + 3a + 1}{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}$; b) $\frac{3m^2 + 4m + 1}{27m^3 + 27m^2 + 9m + 1}$; c) $\frac{6n^2 + 7n + 1}{216n^3 + 108n^2 + 18n + 1}$.
- 22.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{a^2 - 4a + 3}{a^3 - 9a^2 + 27a - 27}$; b) $\frac{a^2 - 9a + 8}{a^3 - 24a^2 + 192a - 512}$; c) $\frac{m^2 - 10m + 9}{m^3 - 27m^2 + 243m - 729}$.
- 23.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{5m^2 - 6m + 1}{125m^3 - 75m^2 + 15m - 1}$; b) $\frac{6c^2 - 7c + 1}{216c^3 - 108c^2 + 18c - 1}$; c) $\frac{8b^2 - 9b + 1}{512b^3 - 192b^2 + 24b - 1}$.
- 24.** Simplificați rapoartele:
a) $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 15x^2 + 75x + 125}$; b) $\frac{b^2 - 6b - 7}{b^3 - 21b^2 + 147b - 343}$; c) $\frac{m^2 - 5m - 24}{m^3 - 24m^2 + 192m - 512}$.

3. Adunarea rapoartelor algebrice

■ Exerciții rezolvate

- 1) $\frac{38}{321} + \frac{57}{321} = \frac{95}{321}$. Suma a două sau mai multe fracții sau rapoarte care au același numitor este o fracție sau un raport cu același numitor ca fiecare termen și are numărătorul egal cu suma numărătorilor sau rapoartelor.
- 2) $\frac{7}{12} + \frac{3}{15} = \frac{35}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$. Deoarece $[12, 15] = 60$, s-a înlocuit fiecare fracție cu o fracție echivalentă cu ea având numitorul 60. Mai departe s-a procedat ca la exercițiul anterior.
- 3) $\frac{x}{(x+5)^2} + \frac{5}{(x+5)^2} = \frac{x+5}{(x+5)^2} = \frac{x}{x+5}$.
- 4) $\frac{2}{x^2+4x+4} + \frac{3}{x+2} = \frac{x}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2} = \frac{x+3x+6}{(x+2)^2} = \frac{4x+6}{(x+2)^2}$.
- 5) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+4} = \frac{2(x+4)+3(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{5x-1}{x^2+x-12}$.

Proprietăți ale adunării rapoartelor algebrice

- 1) *Asociativitatea*: $p + (q + r) = (p + q) + r$.
- 2) *Comutativitatea*: $p + q = q + p$.
- 3) *0, raportul cu numărătorul 0 și numitorul nenul, este element neutru*: $0 + p = p + 0 = p$.
- 4) *Opusul raportului p este -p și p + (-p) = 0*.

■ Exerciții rezolvate

- 1) $\frac{6}{x-7} - \frac{4}{x+8} = \frac{6(x+8)-4(x-7)}{(x-7)(x+8)} = \frac{6x+48-4x+28}{x^2+x-56} = \frac{2x+76}{x^2+x-56}$.
- 2) $\frac{2}{x^3-27} - \frac{3}{x^2-6x+9} = \frac{2}{(x-3)(x^2+3x+9)} - \frac{3}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3)-3(x^2+3x+9)}{(x-3)^2(x^2+3x+9)} = \frac{2x-6-3x^2-9x-27}{(x-3)^2(x^2+3x+9)} = \frac{-3x^2-7x-33}{(x-3)^2(x^2+3x+9)}$. **Răspuns:** $\frac{-3x^2-7x-33}{(x-3)^2(x^2+3x+9)}$.
- 3) $\frac{5}{4x^2-12x+9} - \frac{3}{8x^3-36x^2+18x-27} = \frac{5}{(2x-3)^2} - \frac{3}{(2x-3)^3} = \frac{5(2x-3)-3}{(2x-3)^3} = \frac{10x-15-3}{(2x-3)^3} = \frac{10x-18}{(2x-3)^3}$. **Răspuns:** $\frac{10x-18}{(2x-3)^3}$.

■ Exerciții

1. Efectuați: a) $\frac{a}{a-4} + \frac{3}{a+6}$; b) $\frac{a}{a-5} + \frac{8}{a+7}$; c) $\frac{a}{a-2} + \frac{5}{a+9}$; d) $\frac{a}{a-8} + \frac{5}{a+3}$.
2. Efectuați: a) $\frac{11}{a-8b} + \frac{7}{a+8b}$; b) $\frac{11}{x-2y} + \frac{7}{x+2y}$; c) $\frac{5}{n-4p} + \frac{8}{n+4p}$; d) $\frac{4}{r-5s} + \frac{9}{r+5s}$.
3. Efectuați: a) $\frac{b+2}{b-7} + \frac{2b}{b+7}$; b) $\frac{d-1}{d-5} + \frac{3d}{d+5}$; c) $\frac{d+4}{d-6} + \frac{5d}{b+6}$; b) $\frac{d-6}{d-8} + \frac{7d}{d+8}$.
4. Efectuați: a) $\frac{x}{(x-6)^2} - \frac{6}{(x-6)^2}$; b) $\frac{x}{(x-7)^2} - \frac{7}{(x-7)^2}$; c) $\frac{x}{(x-8)^2} - \frac{8}{(x-8)^2}$.
5. Efectuați: a) $\frac{1}{a+3b} - \frac{2a^2}{a^3+27b^3}$; b) $\frac{1}{x+2y} - \frac{5y^2}{x^3+8y^3}$; c) $\frac{1}{n+4p} - \frac{7p^2}{n^3+64p^3}$; d) $\frac{1}{q+5r} - \frac{126r^2}{q^3+125r^3}$.

6. Efectuați: a) $\frac{3x-5}{4x^2-1} + \frac{4x}{2x+1}$; b) $\frac{4y-1}{9y^2-4} + \frac{2x}{3x+2}$; c) $\frac{2a-3}{25a^2-1} + \frac{3a}{5a+1}$; d) $\frac{4a-1}{16b^2-9} + \frac{4a}{4b+3}$.

7. Efectuați:

a) $\frac{2x}{x^2-9} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$; b) $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{5x}{x^2-4x+4}$; c) $\frac{5x}{4x^2-1} - \frac{4x}{4x^2+4x+1}$;
d) $\frac{3x}{25x^2-1} - \frac{7x}{25x^2-10x+1}$; e) $\frac{5b}{49b^2-1} - \frac{8b}{49b^2-14b+1}$; f) $\frac{4n}{64n^2-1} - \frac{5n}{64n^2-16n+1}$.

8. Efectuați:

a) $\frac{2x^2}{x^3-27} - \frac{3}{x^2+6x+9}$; b) $\frac{6m^2}{m^3+8} - \frac{5}{m^2-2m+4}$; c) $\frac{3n^2}{n^3+64} - \frac{7}{n^2-4n+16}$;
d) $\frac{6x^2}{x^3-125} - \frac{5}{x^2+5x+25}$; e) $\frac{9c^2}{c^3-216} - \frac{4}{c^2+6c+36}$; f) $\frac{8u^2}{u^3-343} - \frac{5}{u^2+7u+49}$.

9. Efectuați: a) $\frac{2}{27x^3-1} - \frac{3}{27x^3-27x^2+9x-1}$; b) $\frac{1}{x^3+8} - \frac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$;
c) $\frac{4}{x^3+64} - \frac{5}{x^3+12x^2+48x+64}$; d) $\frac{7}{x^3-125} - \frac{3}{x^3-15x^2+75x-125}$.

10. Efectuați:

a) $\frac{3x}{4x^2-1} + \frac{4}{2x+1} + \frac{3}{2x-1}$; b) $\frac{5x}{9x^2-1} + \frac{2}{3x+1} + \frac{5}{3x-1}$; c) $\frac{6x}{25x^2-1} + \frac{4}{5x+1} + \frac{3}{5x-1}$.

11. Efectuați:

a) $\frac{7x}{4x^2-25} + \frac{4}{2x+5} + \frac{3}{2x-5}$; b) $\frac{7x}{16x^2-9} + \frac{4}{4x+3} + \frac{3}{4x-3}$; c) $\frac{9x}{49x^2-4} + \frac{1}{7x+2} + \frac{2}{7x-2}$.

12. Efectuați:

a) $\frac{2x^2}{x^3-27} + \frac{3x}{x^2+3x+9} + \frac{4}{x-3}$; b) $\frac{2x^2}{x^3-64} + \frac{5x}{x^2+4x+16} + \frac{3}{x-4}$;
c) $\frac{6x^2}{x^3+125} + \frac{2x}{x^2-5x+25} + \frac{3}{x+3}$; c) $\frac{6x^2}{x^3+216} + \frac{5x}{x^2-6x+36} + \frac{2}{x+6}$.

13. Efectuați:

a) $\frac{5x}{x^2-25} + \frac{3x}{x^2-10x+25} + \frac{3}{x-5}$; b) $\frac{7x}{x^2-49} + \frac{4x}{x^2-14x+49} + \frac{9}{x-7}$;
c) $\frac{5x}{9x^2-16} + \frac{2x}{9x^2+24x+16} + \frac{9}{3x+4}$; d) $\frac{5x}{25x^2-36} + \frac{2x}{25x^2+60x+36} + \frac{5}{5x+6}$.

14. Efectuați:

a) $\frac{x^3}{27x^3-1} + \frac{3x^2}{9x^2-6x+1} - \frac{2}{3x-1}$; b) $\frac{4x^3}{8x^3-27} + \frac{3x^2}{4x^2-24x+9} - \frac{5}{2x-3}$;
c) $\frac{3x^3}{64x^3-125} + \frac{2x^2}{16x^2-40x+25} - \frac{5}{4x-5}$; d) $\frac{5x^3}{27x^3-343} + \frac{3x^2}{9x^2-42x+49} - \frac{2}{3x-7}$.

15. Efectuați:

a) $\frac{m^3}{m^3-18m^2+108m-216} - \frac{3m^2}{m^2-72m+36} - \frac{5}{6-m}$;
b) $\frac{a^3}{64a^3-72a^2+108a-27} - \frac{5a^2}{16a^2-24a+9} - \frac{3}{3-4a}$;
c) $\frac{b^3}{125b^3-300b^2+30b-8} - \frac{2b^2}{25b^2-20b+4} - \frac{3}{2-5b}$.

4. Înmulțirea rapoartelor

■ Exerciții rezolvate

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9} &= \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{15}{35} & 2) \quad \frac{12}{13} \cdot \frac{26}{20} &= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} & 3) \quad \frac{4x^3}{9y^7} \cdot \frac{5x^5}{11y^3} &= \frac{4x^3 \cdot 5x^5}{9y^7 \cdot 11y^3} = \frac{20x^8}{99y^{10}} \\
 4) \quad \frac{2a^4b^{12}}{(a-5)^7} \cdot \frac{3(a-5)^4}{18a^{17}b^{19}} &= \frac{2a^4b^{12} \cdot 3(a-5)^4}{18a^{17}b^{19} \cdot (a-5)^7} = \frac{1}{3a^{13}b^7(a-5)^3} \\
 5) \quad \frac{25x^2 + 30x + 9}{64x^3 - z^6} \cdot \frac{16x^2 - z^4}{125x^3 + 225x^2 + 135x + 27} &= \frac{(5x+3)^2}{(4x-z^2)(16x^2+4xz^2+z^4)} \cdot \frac{(4x+z^2)(4x-z^2)}{(5x+3)^3(4x-z^2)} \\
 &= \frac{4x+z^2}{(5x+3)(16x^2+4xz^2+z^4)} = \frac{4x+z^2}{80x^3+20x^2z^2+5xz^4+48x^2+12xz^2+3z^4}
 \end{aligned}$$

Înmulțirea a două rapoarte algebrice constă în înmulțirea numărătorilor și înmulțirea numitorilor rapoartelor. Rezultatul înmulțirii a două rapoarte algebrice este un raport algebric.

Proprietăți ale înmulțirii rapoartelor

- 1) *Asociativitatea*: $p(qr) = (pq)r$.
- 2) *Comutativitatea*: $pq = qp$.
- 3) *1 este element neutru*: $1 \cdot p = p \cdot 1 = p$.
- 4) *Inversul raportului nenul*: $\frac{p}{q}$ este $\frac{q}{p}$ și $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$.
- 5) *Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere*: $p(q+r) = pq+pr$, $p(q-r) = pq-pr$.

Împărțirea a două rapoarte: $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$.

Ordinea operațiilor. Într-o expresie algebrică, fără paranteze, care conține rapoarte, se execută întâi înmulțirile și împărțirile în ordinea în care apar, apoi se execută adunările și scăderile în ordinea în care apar.

■ Exerciții rezolvate

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{3x^8}{5y^{14}} : \frac{6x^{17}}{35y^{21}} &= \frac{3x^8}{5y^{14}} \cdot \frac{35y^{21}}{6x^{17}} = \frac{7y^7}{6x^9} & 2) \quad \frac{3x(x-3y^2)}{x^4-4y^8} : \frac{x^2-9y^2}{x^2+2y^4} &= \frac{3x(x-3y^2)}{x^4-4y^8} \cdot \frac{x^2+2y^4}{x^2-9y^2} = \\
 &= \frac{3x}{(x^2-2y^4)(x+3y^2)} \cdot \frac{3x}{x^3+3x^2y^2-2xy^4-6y^6} \\
 3) \quad \frac{3x(x-3y^2)}{(x^2+2y^4)(x^2-2y^4)} \cdot \frac{x^2+2y^4}{(x+3y^2)(x-3y^2)} &= \frac{3x}{(x^2-2y^4)(x+3y^2)} \cdot \frac{3x}{x^3+3x^2y^2-2xy^4-6y^6} \\
 &= \frac{3x}{x^2-9y^4} \cdot \frac{64x^9+432x^6+588x^3+343}{x^3-27y^6} = \\
 4) \quad \frac{5a^5}{3b^{12}} + \frac{7b^7}{5a^{35}} \cdot \frac{10a^{35}}{21b^{19}} &= \frac{5a^5}{3b^{12}} + \frac{2a^5}{3b^{12}} = \frac{7a^5}{3b^{12}} \\
 5) \quad \frac{13x^{14}}{15z^{24}} + \frac{10x^{37}}{51z^{42}} : \frac{25x^{37}}{17z^{18}} &= \frac{13x^{14}}{15z^{24}} + \frac{2x^{14}}{15z^{24}} = \frac{15x^{14}}{15z^{24}} = \frac{x^{14}}{z^{24}} \\
 6) \quad \frac{3a+2b}{a+2b} - \frac{6a^3-10ab}{a^3+8b^3} : \frac{3a^2-5b}{a^2-2ab+4b^2} &= \frac{3a+2b}{a+2b} - \frac{6a^3-10ab}{a^3+8b^3} \cdot \frac{a^2-2ab+4b^2}{3a^2-5b} = \frac{3a+2b}{a+2b} - \\
 &= \frac{2a(3a^2-5b)}{(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)} \cdot \frac{a^2-2ab+4b^2}{3a^2-5b} = \frac{3a+2b}{a+2b} - \frac{2a}{a+2b} = \frac{a+2b}{a+2b} = 1. \\
 7) \quad \frac{3a+2b}{3a-2b} - \frac{16ab-20b^2}{27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3} \cdot \frac{9a^2-24ab+4b^2}{4a-5b} &= \frac{3a+2b}{3a-2b} - \frac{4b(4a-5b)}{(3a-2b)^3} \\
 &= \frac{(3a-2b)^2((4a-5b)(3a-2b)^2)}{4a-5b} = \frac{3a+2b}{3a-2b} - \frac{4b}{3a-2b} = \frac{3a-2b}{3a-2b} = 1.
 \end{aligned}$$

■ Exerciții

1. Efectuați:

a) $\frac{11}{14} \cdot \frac{3}{5}$; b) $\frac{13}{17} \cdot \frac{5}{8}$; c) $\frac{21}{26} \cdot \frac{4}{7}$; d) $\frac{27}{29} \cdot \frac{7}{11}$; e) $\frac{15}{28} \cdot \frac{7}{18}$; f) $\frac{35}{33} \cdot \frac{22}{14}$; g) $\frac{21}{45} \cdot \frac{25}{63}$; h) $\frac{36}{56} \cdot \frac{35}{72}$.

2. Efectuați: a) $\frac{5x^{18}}{6y^{21}} \cdot \frac{7x^{29}}{9y^{34}}$; b) $\frac{3x^{38}}{4y^{13}} \cdot \frac{5x^{31}}{8y^{49}}$; c) $\frac{3x^{18}}{16y^{17}} \cdot \frac{5x^{29}}{14y^{34}}$; d) $\frac{23x^{18}}{32y^{17}} \cdot \frac{27x^{29}}{38y^{34}}$; e) $\frac{11x^{51}}{51y^{62}} \cdot \frac{49x^{64}}{59y^{74}}$.

3. Efectuați: a) $\frac{10x^{26}}{35z^{17}} \cdot \frac{30x^{29}}{21z^{56}}$; b) $\frac{24x^{22}}{38z^{92}} \cdot \frac{36x^{87}}{19z^{73}}$; c) $\frac{15x^{15}}{72z^{13}} \cdot \frac{45x^{61}}{18z^{38}}$; d) $\frac{33x^{55}}{51z^{43}} \cdot \frac{55x^{13}}{17z^{67}}$; e) $\frac{81x^{37}}{23z^{98}} \cdot \frac{36x^{74}}{92z^{73}}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{2x}{3x-5} \cdot \frac{2x+3}{3x-1}$; b) $\frac{5x}{3x+4} \cdot \frac{3x+1}{x-3}$; c) $\frac{6x}{9x+2} \cdot \frac{2x+7}{x-9}$; d) $\frac{19x}{7x+2} \cdot \frac{9x+2}{x-17}$; e) $\frac{10x}{2x+9} \cdot \frac{6x+5}{x-12}$.

5. Efectuați: a) $\frac{(x-3)^{13}}{(2x-3)^{57}} \cdot \frac{(2x-3)^{62}}{(x-3)^{35}}$; b) $\frac{(x+2)^{87}}{(3x-1)^{18}} \cdot \frac{(3x-1)^{79}}{(x+2)^{32}}$; c) $\frac{(x+4)^{164}}{(4x-3)^{93}} \cdot \frac{(4x-3)^{217}}{(x+4)^{48}}$.

6. Efectuați:

a) $\frac{(5x-2)^{62}}{(6x-5)^{69}} \cdot \frac{(5x-2)^{89}}{(6x-5)^{88}}$; b) $\frac{(2x-9)^{66}}{(7x-2)^{18}} \cdot \frac{(2x-9)^{55}}{(7x-2)^{28}}$; c) $\frac{(2x-1)^{81}}{(2x-5)^{69}} \cdot \frac{(2x-1)^{21}}{(2x-5)^{43}}$; d) $\frac{(12x-35)^{17}}{(13x+29)^{35}} \cdot \frac{(12x-35)^{85}}{(13x+29)^{58}}$; e) $\frac{(14x-19)^{81}}{(15x+26)^{24}} \cdot \frac{(14x-19)^{38}}{(15x+26)^{74}}$; f) $\frac{(28x-41)^{92}}{(36x+53)^{74}} \cdot \frac{(28x-41)^{36}}{(36x+53)^{39}}$.

7. Efectuați:

a) $\frac{x+3}{3x-4} \cdot \frac{x-3}{3x+4}$; b) $\frac{x+8}{4x-5} \cdot \frac{x-8}{4x+5}$; c) $\frac{2x+7}{6x-5} \cdot \frac{2x-7}{6x+5}$; d) $\frac{9x+7}{3x-8} \cdot \frac{9x-7}{3x+8}$; e) $\frac{2x+11}{5x-9} \cdot \frac{2x-11}{5x+9}$.

8. Efectuați:

a) $\frac{x+3}{8x+13} \cdot \frac{x+6}{8x-13}$; b) $\frac{x+3}{9x+16} \cdot \frac{x+7}{9x-16}$; c) $\frac{x+5}{3x+17} \cdot \frac{x+9}{3x-17}$; d) $\frac{x+8}{5x+18} \cdot \frac{x+6}{5x-18}$.

9. Efectuați:

a) $\frac{x+5}{2x+19} \cdot \frac{2x-19}{x+7}$; b) $\frac{x+8}{8x+21} \cdot \frac{8x-21}{x+9}$; c) $\frac{x+5}{5x+22} \cdot \frac{5x-22}{x+7}$; d) $\frac{x+6}{6x+23} \cdot \frac{6x-23}{x+13}$.

10. Efectuați:

a) $\frac{x+11}{x+13} \cdot \frac{x+19}{x+17}$; b) $\frac{x+21}{x+14} \cdot \frac{x+29}{x+16}$; c) $\frac{x+26}{x+31} \cdot \frac{x+24}{x+39}$; d) $\frac{x+11}{x+32} \cdot \frac{x+19}{x+38}$.

11. Efectuați:

a) $\frac{x+22}{x+33} \cdot \frac{x+37}{x+28}$; b) $\frac{x+34}{x+41} \cdot \frac{x+49}{x+36}$; c) $\frac{x+44}{x+51} \cdot \frac{x+59}{x+46}$; d) $\frac{x+42}{x+52} \cdot \frac{x+58}{x+48}$.

12. Efectuați: a) $\frac{x+53}{x+3} \cdot \frac{x+57}{x^2-3x+9}$; b) $\frac{x+54}{x+4} \cdot \frac{x+56}{x^2-4x+16}$; c) $\frac{x+61}{x+5} \cdot \frac{x+69}{x^2-5x+25}$.

13. Efectuați: a) $\frac{x+61}{x+6} \cdot \frac{x^2-6x+36}{x+69}$; b) $\frac{x+62}{x+7} \cdot \frac{x^2-7x+49}{x+68}$; c) $\frac{x+63}{x+8} \cdot \frac{x^2-8x+64}{x+67}$.

14. Efectuați:

a) $\frac{x+64}{x-9} \cdot \frac{x+66}{x^2+9x+81}$; b) $\frac{x+71}{x-11} \cdot \frac{x+79}{x^2+11x+121}$; c) $\frac{x+72}{x-12} \cdot \frac{x+78}{x^2+12x+144}$.

15. Efectuați:

a) $\frac{x+73}{x-13} \cdot \frac{x^2+13x+169}{x+77}$; b) $\frac{x+74}{x-14} \cdot \frac{x^2+14x+196}{x+76}$; c) $\frac{x+81}{x-15} \cdot \frac{x^2+15x+225}{x+82}$; d) $\frac{x+16}{x-17} \cdot \frac{x^2-16x+256}{x^2+17x+289}$; e) $\frac{x+18}{x-19} \cdot \frac{x^2-18x+324}{x^2+19x+361}$; f) $\frac{x+21}{x-22} \cdot \frac{x^2-21x+441}{x^2+22x+484}$.

5. Puteri cu exponent număr întreg

■ Exerciții rezolvate

- 1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$
- 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^8 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{13} = \left(\frac{a}{b}\right)^{8+13} = \left(\frac{a}{b}\right)^{21}$
- 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{12} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{24} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{34} = \left(\frac{a}{b}\right)^{12+24+34} = \left(\frac{a}{b}\right)^{70}$
- 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{47} : \left(\frac{a}{b}\right)^{59} = \left(\frac{a}{b}\right)^{47-59} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-12} = \left(\frac{b}{a}\right)^{12}$
- 5) $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)^{14} = \left(\frac{a}{b}\right)^{3 \cdot 14} = \left(\frac{a}{b}\right)^{42}$
- 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{12} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{12} = \left(\frac{ax}{by}\right)^{12}$
- 7) $\left(\frac{ax}{by}\right)^{45} = \left(\frac{a}{b}\right)^{45} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{45}$
- 8) $\left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{21} = \frac{(a^2)^{21}}{(b^4)^{21}} = \frac{a^{2 \cdot 21}}{b^{4 \cdot 21}} = \frac{a^{42}}{b^{84}}$
- 9) $\left(\frac{3a^{28}}{7b^{34}}\right)^2 = \frac{3^2 a^{2 \cdot 28}}{7^2 b^{2 \cdot 34}} = \frac{9a^{56}}{49b^{68}}$
- 10) $\left(\frac{a+1}{a-9}\right)^{186} : \left(\frac{a+1}{a-9}\right)^{127} = \left(\frac{a+1}{a-9}\right)^{59}$
- 11) $\left(\frac{2x+3}{x+13}\right)^{246} : \left(\frac{2x+3}{x+13}\right)^{259} = \left(\frac{2x+3}{x+13}\right)^{-13} = \left(\frac{x+62}{2x+3}\right)^{13}$
- 12) $\left(\frac{x+4}{7x+39}\right)^{24} \cdot \left(\frac{x+4}{7x+39}\right)^{93} : \left(\frac{x+4}{7x+39}\right)^{49} = \left(\frac{x+4}{7x+39}\right)^{68}$
- 13) $\left(\frac{3x+13}{9x+77}\right)^{392} \cdot \left(\frac{3x+13}{9x+77}\right)^{183} : \left(\frac{3x+13}{9x+77}\right)^{575} = \left(\frac{3x+13}{9x+77}\right)^0 = 1$

Proprietățile puterilor cu exponentul un număr întreg

- 1) $p^n \cdot p^m = p^{n+m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, p – raport nenul.
- 2) $p^n : p^m = p^{n-m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, p – raport nenul.
- 3) $(p^n)^m = p^{nm}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, p – raport nenul.
- 4) $(pq)^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{Z}$, p și q – rapoarte nenule.
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, raport nenul.
- 6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}^*$.
- 7) $(-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar} \\ 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$

■ Exerciții rezolvate

- 1) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x-x^2+x^2+x^3-x^3-x^4+x^4+x^5-x^5-x^6+x^6+x^7-\dots}{1+x}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x) - x(1+x) + x^2(1+x) - x^3(1+x) + x^4(1+x) - x^5(1+x) + x^6(1+x) - \dots}{1+x}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-\dots)}{1+x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\dots$
- 2) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2-x^4+x^4+x^6-x^6-x^8+x^8+x^{10}-x^{12}-x^{14}+x^{16}+x^{18}-\dots}{1+x^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-\dots)}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-\dots$

■ Exerciții

1. Scrieți mai simplu: a) $\frac{a}{a-b} \cdot \frac{a}{a-b} \cdot \frac{a}{a-b} \cdot \frac{a}{a-b}$; b) $\frac{3a}{x+b} \cdot \frac{3a}{x+b} \cdot \frac{3a}{x+b} \cdot \frac{3a}{x+b} \cdot \frac{3a}{x+b} \cdot \frac{3a}{x+b}$.
2. Efectuați: a) $\left(\frac{x+n}{x-c}\right)^{14} \cdot \left(\frac{x+n}{x-c}\right)^{29}$; b) $\left(\frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^{31} \cdot \left(\frac{a-b+c}{a+b+c}\right)^{131}$; c) $\left(\frac{2a-b+3c}{5a-b+2c}\right)^{83} \cdot \left(\frac{2a-b+3c}{5a-b+2c}\right)^{392}$.
3. Efectuați: a) $\left(\frac{12n}{n-7}\right)^{94} : \left(\frac{12n}{n-7}\right)^{73}$; b) $\left(\frac{a-b-c}{a+b+c}\right)^{82} : \left(\frac{a-b-c}{a+b+c}\right)^{37}$; c) $\left(\frac{11a-9c}{4a-x+7c}\right)^{325} : \left(\frac{11a-9c}{4a-x+7c}\right)^{186}$.
4. Efectuați: a) $\left(\frac{5ab}{a-3}\right)^{91} : \left(\frac{5ab}{a-3}\right)^{99}$; b) $\left(\frac{2abc}{3a+28b}\right)^{79} : \left(\frac{2abc}{3a+28b}\right)^{95}$; c) $\left(\frac{23a-51c}{2a-x+3c}\right)^{183} : \left(\frac{23a-51c}{2a-x+3c}\right)^{364}$.

5. Efectuați: a) $\left(\left(\frac{a+1}{b-12}\right)^{11}\right)^{13}$; b) $\left(\left(\frac{x+2}{y-19}\right)^{11}\right)^{39}$; c) $\left(\left(\frac{4ax}{n-92}\right)^{83}\right)^{11}$; d) $\left(\left(\frac{21ab}{c+41}\right)^{85}\right)^{11}$.
6. Efectuați: a) $\left(\frac{2ax^2}{5b^5}\right)^{37} \cdot \left(\frac{3cx^3}{7dy^9}\right)^{37}$; b) $\left(\frac{6cx^3}{10b^3}\right)^{37} \cdot \left(\frac{5cx^8}{9ny^4}\right)^{37}$; c) $\left(\frac{8nx^2}{21b^3}\right)^{37} \cdot \left(\frac{7bx^3}{4nz^7}\right)^{37}$.
7. Efectuați: a) $\left(\frac{a^3b^8x^2}{c^4n^6y^{11}}\right)^5$; b) $\left(\frac{-a^4b^5x^9}{c^{24}n^{14}y^8}\right)^3$; c) $\left(\frac{-a^3b^7x^{14}}{c^{31}n^{27}y^{18}}\right)^{11}$; d) $\left(\frac{-a^{18}b^5x^{24}}{c^{11}n^{18}y^{31}}\right)^{14}$.
8. Efectuați:
a) $\left(-\frac{x-1}{2(x+3)^2}\right)^4$; b) $\left(-\frac{2x-5}{2(3x+2)^2}\right)^5$; c) $\left(-\frac{3(6x-5)^3}{8(2x+11)^2}\right)^{15}$; d) $\left(-\frac{2(7x-2)^7}{9(3x+11)^5}\right)^{32}$; e) $\left(-\frac{7(8x-3)^7}{3(4x+47)^5}\right)^{43}$.
9. Efectuați:
a) $\left(-\frac{3x-13}{x^2+12x}\right)^{28} \cdot \left(-\frac{3x-13}{x^2+12x}\right)^{31} : \left(-\frac{3x-13}{x^2+12x}\right)^{27}$; b) $\left(-\frac{2x^3-34}{3x^5+2x}\right)^{56} \cdot \left(-\frac{2x^3-34}{3x^5+2x}\right)^{39} : \left(-\frac{2x^3-34}{3x^5+2x}\right)^{69}$.
10. Efectuați:
a) $\left(-\frac{5x-2}{y^7+17y}\right)^{67} \cdot \left(-\frac{5x-2}{y^7+17y}\right)^{54} : \left(-\frac{5x-2}{y^7+17y}\right)^{121}$; b) $\left(-\frac{4x^8-67}{8x^9+3x}\right)^{83} \cdot \left(-\frac{4x^8-67}{8x^9+3x}\right)^{59} : \left(-\frac{4x^8-67}{8x^9+3x}\right)^{142}$.
11. Efectuați:
a) $\left(-\frac{25x-3}{32x^7+a}\right)^{93} : \left(-\frac{25x-3}{32x^7+a}\right)^{93} : \left(-\frac{25x-3}{32x^7+a}\right)^{93}$; b) $\left(-\frac{2x^3-5}{9x^5+2x}\right)^{74} : \left(-\frac{2x^3-5}{9x^5+2x}\right)^{42} : \left(-\frac{2x^3-5}{9x^5+2x}\right)^{95}$.
12. Efectuați:
a) $\left(-\frac{11a-18}{a^2+13b}\right)^{34} \cdot \left[\left(-\frac{11a-18}{a^2+13b}\right)^8\right]^4$; b) $\left(-\frac{2x-31}{x^2+84x}\right)^{127} \cdot \left[\left(-\frac{2x-31}{x^2+84x}\right)^{41}\right]^7$.
13. Efectuați:
a) $\left(-\frac{2a-5}{a^5+24a}\right)^{129} : \left[\left(-\frac{2a-5}{a^5+24a}\right)^{12}\right]^6$; b) $\left(-\frac{5x-26}{9x^4+4x}\right)^{194} : \left[\left(-\frac{5x-26}{9x^4+4x}\right)^{21}\right]^8$.
14. Efectuați:
a) $\left(-\frac{8a-3}{b^3+27a}\right)^{131} : \left[\left(-\frac{8a-3}{b^3+27a}\right)^{35}\right]^5$; b) $\left(-\frac{7x-36}{6x^2+5x}\right)^{225} : \left[\left(-\frac{7x-36}{6x^2+5x}\right)^{41}\right]^6$.
15. Efectuați:
a) $\left(\frac{2a-7}{a^5+19a}\right)^{164} - \left(\frac{2a-7}{a^5+19a}\right)^{38} \cdot \left(\frac{2a-7}{a^5+19a}\right)^{126}$; b) $\left(\frac{19a-4}{9a^2+2a}\right)^{302} - \left(\frac{19a-4}{9a^2+2a}\right)^{137} \cdot \left(\frac{19a-4}{9a^2+2a}\right)^{165}$.
16. Efectuați:
a) $\left(\frac{7a-1}{3a^5+2a}\right)^{168} - \left(\frac{7a-1}{3a^5+2a}\right)^{258} : \left(\left(\frac{7a-1}{3a^5+2a}\right)^6\right)^{15}$; b) $\left(\frac{22x-3}{4x^2+3x}\right)^{137} - \left(\frac{22x-3}{4x^2+3x}\right)^{347} : \left(\left(\frac{22x-3}{4x^2+3x}\right)^5\right)^{42}$.
17. Efectuați:
a) $\left(\frac{(3a-1)^7}{(2b+3)^{11}}\right)^{23} \cdot \left(\frac{(3a-1)^3}{(2b+3)^7}\right)^4$; b) $\left(\frac{(5a-2)^{14}}{(4b+1)^{56}}\right)^{23} \cdot \left(\frac{(5a-2)^6}{(4b+1)^9}\right)^4$;
c) $\left(\frac{(2x-7)^{43}}{(3z+2)^{56}}\right)^{14} \cdot \left(\frac{(2x-7)^8}{(3z+2)^6}\right)^7$; d) $\left(\frac{(5x-3)^{78}}{(2z+5)^{35}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{(5x-3)^{11}}{(2z+5)^8}\right)^5$.
18. Efectuați:
a) $\left(\frac{(7a-5)^{25}}{(4b-9)^{55}}\right)^{34} \cdot \left(\frac{(4b-9)^{57}}{(7a-5)^{39}}\right)^{34} : \left(\frac{(4b-9)^{11}}{(7a-5)^3}\right)^{45}$; b) $\left(\frac{(6a-1)^{42}}{(2b-7)^{61}}\right)^{93} \cdot \left(\frac{(2b-7)^{46}}{(6a-1)^{82}}\right)^{93} : \left(\frac{(4b-9)^{19}}{(2b-7)^{15}}\right)^{74}$;
c) $\left(\frac{(4a-9)^{19}}{(3b-2)^{45}}\right)^{41} \cdot \left(\frac{(3b-2)^{78}}{(4a-9)^{53}}\right)^{41} : \left(\frac{(3b-2)^{68}}{(4a-9)^{48}}\right)^{75}$; d) $\left(\frac{(5a+7)^{62}}{(6b-5)^{84}}\right)^{46} \cdot \left(\frac{(6b-5)^{94}}{(5a+7)^{63}}\right)^{46} : \left(\frac{(6b-5)^{26}}{(5a+7)^{31}}\right)^{27}$.

6. Transformări ale expresiilor algebrice

■ Exerciții rezolvate

- 1) Aduceți la forma cea mai simplă: $\frac{1}{x^2-1} + \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) : \left(\frac{x+1}{2} - 1\right) \cdot (x^2-1).$

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) : \left(\frac{x+1}{2} - 1\right) &= \frac{x+1}{2} ; \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} ; \frac{1}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \\ &= \frac{1+x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} ; \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} : (x^2+2x+2) = \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} : (x^2+2x+2) = \\ &= \frac{x^2+2x+2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2+2x+2} ; \frac{1}{x^2-1} \cdot (x^2-1) = 1. \text{ Răspuns: } 1. \end{aligned}$$

- 2) Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{x^2+8}{x^3-8} + \frac{x}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x}\right) \cdot (x^2+4x+4).$

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \left(\frac{x^2+8}{x^3-8} + \frac{x}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}\right) \cdot (x+2)^2 &= \\ &= \frac{x^2+8+x^2-2x-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-2)} \cdot (x+2)^2 = \\ &= \frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-2)} \cdot (x+2)^2 = x+2. \text{ Răspuns: } x+2. \end{aligned}$$

- 3) Aduceți la forma cea mai simplă: $\left[\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{a^2+a}{a^3-1} \left(\frac{1}{a^2-a} + \frac{a}{a^2-1}\right)\right] \cdot (a^4-2a^2+1).$

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \left[\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} \left(\frac{1}{a(a-1)} + \frac{a}{(a+1)(a-1)}\right)\right] \cdot (a^2-1)^2 &= \\ &= \left(\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a^2+a+1}{a(a+1)(a-1)}\right) \cdot (a^2-1)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}\right) \cdot (a+1)^2 \cdot (a-1)^2 = \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a+1)^2 \cdot (a-1)^2} \cdot (a+1)^2 \cdot (a-1)^2 = -4a. \end{aligned}$$

Răspuns: $-4a$.

■ Exerciții

1. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{18}{x^2-4} - \frac{3}{x+3} + \frac{4}{3-x}$; b) $\frac{16}{9x^2-4} - \frac{5}{3x+2} + \frac{2}{2-3x}$; c) $\frac{15}{25x^2-9} - \frac{4}{5x+3} + \frac{3}{3-5x}$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{(x^2-4)(x^2+4)}$; b) $\frac{x^4-2x^3-12x^2+18x+27}{(x^2-9)(x^2+3)}$; c) $\frac{x^4-3x^3-20x^2+48x+64}{(x^2-16)(x^2+5)}$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\left(\frac{n+1}{n-1} + \frac{n-1}{n+1} - 1\right) : \left(\frac{4}{n^2-1} + 1\right)$; b) $\left(\frac{3a+b}{3a-b} + \frac{3a-b}{3a+b} - 1\right) : \left(\frac{4b^2}{9a^2-b^2} + 1\right).$

4. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \left(\frac{b^2 - b}{b^2 + 1} + \frac{2b^2}{b^3 - b^2 + b - 1} \right) : \frac{b^2}{b^2 - 1}; \quad \text{b) } \left(\frac{4a^2 - 2a}{4a^2 + 1} + \frac{8a^2}{8a^3 - 4a^2 + 2a - 1} \right) : \frac{4a^2}{4a^2 - 1}.$$

5. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{2a-1} + \frac{7}{2a+1} + \frac{20a-4}{1-4a^2} \right)^{2023} : \left(\frac{1}{a+1} \right)^{2024}; \quad \text{b) } \left(\frac{2}{4a-3b} + \frac{5}{4a+3b} + \frac{28a-9b}{9b^2-16a^2} \right)^{100} : \left(\frac{1}{a+b} \right)^{10}.$$

6. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \left\{ \left[\left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2 + 2 \left(\frac{n+1}{n-1} \right) + 1 \right] \cdot \frac{(n^2-1)^2}{4n^2} \right\}^{2023}; \quad \text{b) } \left\{ \left[\left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^2 + 2 \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right) + 1 \right] \cdot \frac{(2x-3)^2}{16x^2} \right\}^{3003}.$$

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \left\{ \left[\left(\frac{a+3}{a-2} \right)^2 - 2 \left(\frac{a+3}{a-2} \right) + 1 \right] \cdot \frac{(a-2)^2}{25} \right\}^{2000}; \quad \text{b) } \left\{ \left[\left(\frac{2b+3}{3b-2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2b+3}{3b-2} \right) + 1 \right] \cdot \left(\frac{3b-2}{5-b} \right)^2 \right\}^{10000}.$$

8. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \left\{ \left[\left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2 + 2 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{2(n^2+1)}{n^2-1} \right)^2 \right\}^{7000}; \quad \text{b) } \left\{ \left[\left(\frac{n+1}{n-1} \right)^2 - 2 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right] \cdot \left(\frac{n^2-1}{4n} \right)^2 \right\}^{3000}.$$

9. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{b^2 - b}{b^2 + 1} + \frac{2b^3}{b^3 - b^2 + b - 1} \right) : \frac{b^8 - b^2}{(b^2 - 1)(b^4 + b^2 + 1)}.$

10. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1} + \frac{3a-2}{3a^2-1} - \frac{18a^3-a-9}{9a^4-1} \right) : \frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}.$

11. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left[\frac{4b+6}{2b^2+6b+4} : \left(\frac{1}{(b+1)^2} - \frac{1}{(b+2)^2} \right) + b+2 \right] : (b^2 - b - 6).$

12. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2x-z} + \frac{2}{2x+z} + \frac{3z}{z^2-4x^2} \right) : \left(1 + \frac{3z^2-12xz+5x^2}{4x^2-z^2} \right).$

13. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left[\left(\frac{1-n}{n+1} - 2 + \frac{n+1}{1-n} \right) : \frac{4n}{1-n} + n \right] : \frac{n^3+5n^2+6n}{n+1}.$

14. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\left(\frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1} - \frac{8}{(1-x^2)(x^2+3)} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{1-x^2} \right) : \frac{4x-1}{3x^2+3x}.$$

15. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \right) \cdot \frac{3a^3+3a^2b+3ab^2}{a^3-b^3}.$

16. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\left(\frac{3a}{a^2-4ab+4b^2} + \frac{2a+b}{(a+b)(a-2b)} + \frac{5}{a+b} \right) : \frac{20ab-7b^2}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}.$$

17. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1-x^2}} : \frac{x-1}{x} + \left(\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x} - 2 \right) : \frac{x^2-3x+9}{3x^2-3x}.$$

18. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2}{ab+b^2} - \frac{b^2}{ab+a^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} : \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{a^2-2ab+b^2}{2ab} \cdot (1-x^2)(x^2+3).$$

19. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\left(\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{2-m} + \frac{1}{m+2} \right) : \left(m-2 + \frac{2ab}{m+2} \right) \cdot (2-m) + \frac{(4m+3)(m^2+m+1)}{(m+1)^3+m^3} : \frac{4m+3}{2m+1}.$$

Sintează

1. Determinați DVA pentru:

a) $\frac{3x}{x-2}$; b) $\frac{11}{2x+5}$; c) $\frac{8}{8-3x}$; d) $\frac{7}{x^2-1}$; e) $\frac{25}{x^2-4}$; f) $\frac{12}{4x^2-9}$; g) $\frac{3}{x^2+2x+3}$; h) $\frac{2}{x^2+4x+3}$.

2. Simplificați fiecare raport: a) $\frac{2x+5}{12x^2+30x}$; b) $\frac{5x-8}{35x^2-56x}$; c) $\frac{6x^9-11}{42x^{11}-77x^6}$; d) $\frac{7x-9}{56x^8-72x^7}$.

3. Simplificați fiecare raport: a) $\frac{4a^2-9x^2}{4a^2-12ax+9x^2}$; b) $\frac{25a^2-4b^2}{25a^2-20ab+4b^2}$; c) $\frac{16c^4-9d^2}{16c^4-24c^2d+9d^2}$.

4. Simplificați fiecare raport:

a) $\frac{a^2+2b}{a^6+6a^4b+12a^2b^2+8b^3}$; b) $\frac{x+3y^3}{x^3+9x^2y^3+27xy^6+27y^9}$; c) $\frac{m^2+4p}{m^6+12m^4p+48m^2p^2+64p^3}$.

5. Simplificați fiecare raport:

a) $\frac{4a^4-12a^2x+9x^2}{8a^6-18a^4x+54a^2x^2-27x^3}$; b) $\frac{9n^2-24nx^3+16x^6}{27n^3-108n^2x^3+144nx^6-64x^9}$; c) $\frac{4n^2-10nx^2+25x^4}{8n^3-60n^2x^2+150nx^4-125x^6}$.

6. Simplificați fiecare raport: a) $\frac{64a^6-27x^3}{16a^4-24a^2x+9x^2}$; b) $\frac{125a^3-64b^6}{25a^2-40ab^2+4b^4}$; c) $\frac{216c^9-d^3}{36c^6-12c^3d+d^2}$.

7. Simplificați fiecare raport: a) $\frac{27a^6+64x^9}{9a^4-12a^2x^3+16x^6}$; b) $\frac{64a^9+125b^9}{16a^6-20a^3b^3+25b^6}$; c) $\frac{c^6-343d^9}{c^4-7c^2d^3+49d^6}$.

8. Simplificați fiecare raport: a) $\frac{x^2+5ax+6a^2}{a^2+6ax+9x^2}$; b) $\frac{a^2+8ab+12b^2}{a^2+12ab+36b^2}$; c) $\frac{a^2+10ab+21b^2}{a^2+14ab+49b^2}$.

9. Efectuați: a) $\frac{4}{a-3} + \frac{3}{a+1}$; b) $\frac{4}{a-4} + \frac{6}{a+2}$; c) $\frac{9}{a-2} + \frac{7}{a+3}$; d) $\frac{11}{a-6} + \frac{5}{a+5}$.

10. Efectuați: a) $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a+2} + \frac{3a}{4-a^2}$; b) $\frac{2}{a-3} + \frac{3}{a+3} + \frac{7a}{9-a^2}$; c) $\frac{2}{3a-2} + \frac{3}{3a+2} + \frac{4a}{4-9a^2}$.

11. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{3a}{a^2+2a+4} + \frac{2a^2}{a-2} + \frac{3}{8-a^3}$; b) $\frac{2a}{x^2+3x+9} + \frac{3x^2}{x-3} + \frac{3}{27-x^3}$; c) $\frac{2a}{x^2+4x+16} + \frac{3x^2}{x-4} + \frac{3}{64-x^3}$.

12. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{4}{a^2+5a+4} + \frac{2a}{a+1} + \frac{3a}{a+4}$; b) $\frac{5}{a^2-5a+6} + \frac{4a}{a-2} + \frac{2a}{a-3}$; c) $\frac{5}{a^2-8a+7} + \frac{2a}{a-1} + \frac{3a}{a-7}$.

13. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{7x+3}{3x-1} \cdot \frac{7x-3}{3x+1}$; b) $\frac{5x+3}{8x-5} \cdot \frac{5x-3}{8x+5}$; c) $\frac{9x+2}{6x-7} \cdot \frac{9x-2}{6x+7}$; d) $\frac{7x+11}{14x-9} \cdot \frac{7x-11}{14x+9}$.

14. Aduceți la forma cea mai simplă: a) $\frac{8x+13}{19x-8} : \frac{8x-13}{19x+8}$; b) $\frac{23x+3}{25x-4} : \frac{23x-3}{25x+4}$; c) $\frac{2x+29}{31x-9} : \frac{2x-29}{31x+9}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{x^2-3x+9}{a^2+5a+25} \cdot \frac{x+3}{a-5}$; b) $\frac{4x^2+3x+9}{9a^2-12a+16} \cdot \frac{2x-3}{3a+4}$; c) $\frac{16x^2+20x+25}{49a^2-56a+64} \cdot \frac{4x-5}{7a+8}$.

16. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{4a^2+6a+9}{9x^2-12x+16} \cdot \frac{27x^3+64}{8a^3-27}$; b) $\frac{4x^2+50x+25}{49a^2-14a+4} \cdot \frac{343a^3+8}{8x^3-125}$; c) $\frac{4x^2+10x+25}{16x^2-20x+25} \cdot \frac{64x^3+125}{125x^3-64}$.

17. Introduceți factorii sub radical:

a) $\frac{9x^2-24x+16}{16a^2+40a+25} : \frac{27x^3-108x^2+144x-64}{64a^3+240a^2+300a+125}$; b) $\frac{4x^2-20x+25}{16a^2+56a+49} : \frac{8x^3-60x^2+150x-125}{64a^3+336a^2+588a+343}$.

Evaluare

I

1. Determinați DVA pentru:

a) $\frac{4}{x-9}$; b) $\frac{3,2}{5x+8}$.

2. Simplificați fiecare raport:

a) $\frac{x+4}{12x^2+48x}$; b) $\frac{3x^2-7}{21x^4-49x^2}$.

3. Simplificați raportul:

$$\frac{a^2-9x^2}{a^2-12ax+9x^2}.$$

4. Simplificați raportul:

$$\frac{a^3+3b}{a^9+9a^6b+27a^3b^2+27b^3}.$$

5. Simplificați raportul:

$$\frac{27a^6+64x^6}{9a^4-12a^2x^2+16x^4}.$$

6. Simplificați raportul:

$$\frac{x^2+7ax+12a^2}{a^2+8ax+16x^2}.$$

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{9}{a-2} + \frac{7}{a+3}.$$

8. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{8}{a-4} + \frac{7}{a+4} + \frac{3a}{16-a^2}.$$

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{4a^6+6a^3+9}{9x^4-12x^2+16} \cdot \frac{27x^6+64}{8a^9-27}.$$

II

20 1. Determinați DVA pentru:

a) $\frac{6}{x-5}$; b) $\frac{7,6}{2x+9}$.

10 2. Simplificați fiecare raport:

a) $\frac{x+3}{12x^2+36x}$; b) $\frac{5x^3-2}{35x^5-14x^2}$.

10 3. Simplificați raportul:

$$\frac{a^2-4x^4}{a^2-4ax^2+4x^4}.$$

10 4. Simplificați raportul:

$$\frac{a^3+4b}{a^9+12a^6b+48a^3b^2+64b^3}.$$

10 5. Simplificați raportul:

$$\frac{64a^9+27x^6}{16a^6-12a^3x^2+9x^4}.$$

10 6. Simplificați raportul:

$$\frac{x^2+8ax+15a^2}{a^2+10ax+25x^2}.$$

10 7. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{10}{a-3} + \frac{9}{a+2}.$$

10 8. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{7}{a-5} + \frac{8}{a+5} + \frac{4a}{25-a^2}.$$

10 9. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{9a^4+6a^2+4}{16x^6-12x^3+9} \cdot \frac{64x^9+27}{27a^6-8}.$$

Din istoria matematicii

Cine a fost cel care, fără să fi fost matematician, e cunoscut ca un mare matematician?

S-a născut în sudul Franței, la Beaumont-de-Lomagne. Tatăl lui a fost negustor și consul al orașului. A studiat limbile clasice, și s-a specializat în drept. A ajuns magistrat în Parlamentul de la Toulouse, post care i-a asigurat siguranța financiară și adaosul „de” la nume, ceea ce însemna un rang de noblețe. A fost căsătorit și a avut cinci copii.

Matematica a fost marea lui pasiune și i-a consacrat ei mult din timpul său liber. A făcut multe descoperiri în matematică. A formulat multe conjecturi (propoziții matematice nedemonstrate). Unele dintre ele au fost demonstrate de matematicieni de profesie și ele au fost păstrate în matematică cu numele celui care le-a formulat, Fermat. Ele apar în: teoria numerelor, teoria probabilităților, calcul diferențial. A comunicat descoperirile în scrisorile cu: Descartes, Pascal, Huygens, Wallis, Mersenne.

Fermat a scris într-o scrisoare: Eu nu am demonstrat „... m-am mulțumit să descopăr adevărul ...”.



Pierre de Fermat
(1601–1665)

Suplimentar

1. Scrieți ca sumă infinită rapoartele: a) $\frac{1}{1-x}$; b) $\frac{1}{1-x^2}$; c) $\frac{1}{1+x^3}$; d) $\frac{1}{1+x^4}$.
2. Aduceți la forma cea mai simplă suma infinită:
a) $1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \dots$; b) $1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \dots$; c) $1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \dots$
3. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $(1-x)(1+x+x^2+x^3)$; b) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$; c) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots)$.
4. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $(1+x)(1-x+x^2-x^3)$; b) $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$; c) $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots)$.
5. Calculați: $(\sqrt{12+3\sqrt{7}} + \sqrt{8-2\sqrt{7}} - 1 - \sqrt{7})^{2024}$.

6. Calculați:

$$\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{26 - 2\sqrt{21}}}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{26 - 2\sqrt{21}}}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{26 - 2\sqrt{21}}} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}.$$

7. Demonstrați că pentru valorile variabilelor din DVA este adevărată fiecare dintre propozițiile:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}; \\ \text{b) } & a \cdot \frac{b-c}{a^2bc+1} + b \cdot \frac{c-a}{ab^2c+1} + c \cdot \frac{a-b}{abc^2+1} = \frac{abc(a-b)(b-c)(c-a)}{(a^2bc+1)(ab^2c+1)(abc^2+1)}; \\ \text{c) } & \frac{a-b}{1+a+b+2ab} + \frac{b-c}{1+b+c+2bc} + \frac{c-a}{1+a+c+2ac} = \\ & = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+a+b+2ab)(1+b+c+2bc)(1+a+c+2ac)}. \end{aligned}$$

8. Descompuneți în rapoarte simple: a) $\frac{1}{n^2+n}$; b) $\frac{1}{n^2+4n+3}$.

9. Aplicând rezultatele de la exercițiul anterior calculați sumele telescopice:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n^2+n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n^2+4n+3}.$$

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\begin{aligned} \text{a) } e &= \frac{1}{1+2006^{-1}} + \frac{1}{1+2005^{-1}} + \frac{1}{1+2004^{-1}} + \dots + \frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007}; \\ \text{b) } e &= \frac{1}{1+2023^{-1}} + \frac{1}{1+2022^{-1}} + \frac{1}{1+2021^{-1}} + \dots + \frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}. \end{aligned}$$

11. Simplificați fiecare raport:

$$\text{a) } r = \frac{a^2 + a\sqrt{b} - \sqrt{ab} - b}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}}; \quad \text{b) } r = \frac{ac - ad + bc\sqrt{d} - bd\sqrt{c}}{a\sqrt{c} + b\sqrt{cd} + a\sqrt{d}}.$$

12. Simplificați fiecare raport:

$$\text{a) } r = \frac{a^2 + 2a + 2a\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x}}{a^2 - a + a\sqrt{x} - \sqrt{x}}; \quad \text{b) } r = \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x - 2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3 - 3x + 2}.$$

13. Demonstrați că fiecare propoziție este adevărată:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac; \\ \text{b) } & (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc; \\ \text{c) } & (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c). \end{aligned}$$

1. Noțiunea de funcție

Fie mulțimile nevide A și B . Procedul prin care fiecărui element al mulțimii A i se asociază un singur element al mulțimii B este o **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B (sau „de la A la B ”). Funcția f definită pe A cu valori în B se notează $f: A \rightarrow B$.

Elementele unei funcții

Fie funcția $f: A \rightarrow B$ (se citește „ef de la A la B ”). Atunci **elementele funcției** f sunt: 1) mulțimea A este **domeniul de definiție al funcției** f (se notează frecvent D); 2) mulțimea B este **domeniul valorilor funcției** f (se notează $E(f)$ sau E); 3) f este **legea de corespondență** sau asociere.

Fie funcția $f: A \rightarrow B$ și $x \in A$. Dacă funcția f asociază lui x elementul $y \in B$, atunci se spune că y este **valoarea** funcției f în x și se scrie $f(x) = y$.

Fie funcția $f: A \rightarrow B$. **Mulțimea valorilor funcției** f este mulțimea $\text{Im } f = \{y = f(x) \mid x \in A\}$. Domeniul valorilor funcției f conține valorile funcției, $\text{Im } f \subseteq B$. **Graficul funcției** f este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Dacă A și B sunt mulțimi de numere, atunci mulțimea G_f poate fi reprezentată geometric printr-o mulțime de puncte, care se numește, de asemenea, **graficul funcției** f .

■ Exerciții rezolvate

- 1) Fie funcția $f: (-3, 2] \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = [x]$ (partea întreagă a lui x). Elementele funcției f sunt: domeniul de definiție $D = (-3, 2]$; domeniul valorilor $E(f) = \mathbb{Z}$; legea de corespondență $f(x) = [x]$. Valorile lui f sunt: $f(-2,4) = -3, f(-1,6) = -2, f(2) = 2$. Mulțimea valorilor funcției f este $\text{Im } f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Evident, $\text{Im } f \subset E(f)$. 2) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 9|$, are mulțimea valorilor $\text{Im } f = [0, \infty)$. 3) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 3$, are mulțimea valorilor $\text{Im } f = (-\infty, 3]$.

Moduri de definire a unei funcții

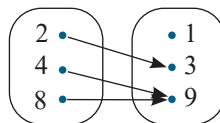
O funcție poate fi definită: 1) prin diagrame, tabele, grafice etc.; 2) analitic (regulă, formulă).

■ Exerciții rezolvate

- 1) Diagrama definește funcția $f: \{2, 4, 8\} \rightarrow \{1, 3, 9\}$. Corespondența este indicată prin săgeți. $D(f) = \{2, 4, 8\}, E(f) = \{1, 3, 9\}$. $\text{Im } f = \{3, 9\}$.
- 2) Tabelul

x	2	3	5	7
$f(x)$	-2	6	4	5

 definește funcția $f: \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow \{-2, 4, 5, 6\}$.
 $f(2) = -2, f(3) = 6, f(5) = 4, f(7) = 5$.
- 3) $f(x) = \sqrt{x-1,5}, x \in \mathbb{R}$, definește o funcție $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ cu $D(f) = [1,5; \infty)$ **domeniul maxim de definiție** în $\mathbb{R}$. $D(f)$ s-a aflat rezolvând în $\mathbb{R}$ inecuația $x - 1,5 \geq 0$. Deoarece valoarea radicalului este un număr real cel puțin egal cu 0, $\text{Im } f = [0, \infty)$.
- 4) Câte funcții $f: A \rightarrow B$ există? a) Fie $A = \{a\}$ și $B = \{1, 2\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1; f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2$. $2^1 = 2$. 2 funcții. b) Fie $A = \{a\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1; f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2; f_3: A \rightarrow B, f_3(a) = 3$. $3^1 = 3$. 3 funcții. c) Fie $A = \{a\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1; f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2; f_3: A \rightarrow B, f_3(a) = 3; f_4: A \rightarrow B, f_4(a) = 4$. $4^1 = 4$. 4 funcții. d) Fie $A = \{a, b\}$ și $B = \{1, 2\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1, f_1(b) = 1; f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2, f_2(b) = 2; f_3: A \rightarrow B, f_3(a) = 1, f_3(b) = 2; f_4: A \rightarrow B, f_4(a) = 2, f_4(b) = 1$. $2^2 = 4$. 4 funcții. e) Fie $A = \{a, b\}$ și $B = \{1, 2\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1, f_1(b) = 1; f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2, f_2(b) = 2; f_3: A \rightarrow B, f_3(a) = 1, f_3(b) = 2; f_4: A \rightarrow B, f_4(a) = 2, f_4(b) = 1$. $2^2 = 4$. 4 funcții.

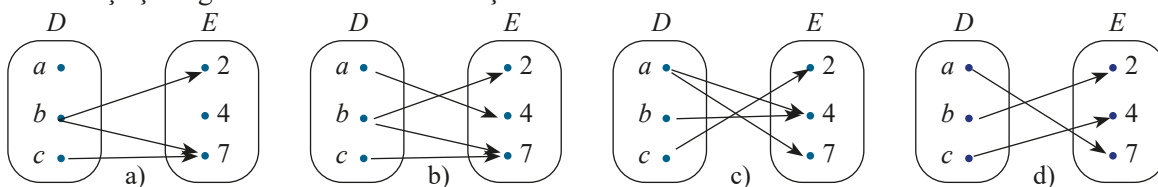


e) Fie $A = \{a, b\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. $f_1: A \rightarrow B, f_1(a) = 1, f_1(b) = 1$; $f_2: A \rightarrow B, f_2(a) = 2, f_2(b) = 2$; $f_3: A \rightarrow B, f_3(a) = 3, f_3(b) = 3$; $f_4: A \rightarrow B, f_4(a) = 1, f_4(b) = 2$; $f_5: A \rightarrow B, f_5(a) = 2, f_5(b) = 1$; $f_6: A \rightarrow B, f_6(a) = 1, f_6(b) = 3$; $f_7: A \rightarrow B, f_7(a) = 3, f_7(b) = 1$; $f_8: A \rightarrow B, f_8(a) = 2, f_8(b) = 3$; $f_9: A \rightarrow B, f_9(a) = 3, f_9(b) = 2$. $3^2 = 9$. 9 funcții.

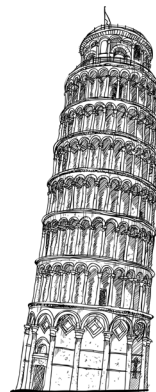
Fie mulțimile A și B , card $A = n$ și card $B = m$, fiind numere nenule și toate funcțiile $f: A \rightarrow B$. Atunci numărul tuturor funcțiilor f este egal cu m^n .

■ Exerciții

- Copiați și apoi completați propozițiile adevărate: a) Intervalul ... $[a, b] = \dots$
b) Intervalul ... $(a, b) = \dots$ c) Intervalul ... $(a, b] = \dots$ d) Intervalul ... $(a, \infty) = \dots$
e) Intervalul ... $[a, \infty) = \dots$ f) Intervalul ... $(-\infty, a) = \dots$ g) Intervalul ... $(-\infty, a] = \dots$
- Enumerați numerele naturale din intervalul:
a) $[-3, 1; 5, 8]$; b) $[-7, 4; 6]$; c) $[-9, 5; 8]$; d) $[-12, 7; 3]$.
- Enumerați numerele întregi din intervalul:
a) $[-4, 3; 12, (3)]$; b) $[-8, 1; 15]$; c) $[-5, 7; 8]$; d) $[-7; 16, (3)]$.
- Enumerați numerele naturale din intervalul:
a) $(-13, 6; 7, 91]$; b) $(-15; 4, 2]$; c) $(-8, 4; 5, 05]$; d) $(-9; 16]$.
- Enumerați numerele naturale din intervalul: a) $[12, \infty)$; b) $[-5, 1; \infty)$; c) $[-7, \infty)$; d) $[7, 13; \infty)$.
- Enumerați numerele naturale din intervalul: a) $(-\infty; 1, 4)$; b) $(-\infty; 4, 2)$; c) $(-\infty; 0, 8)$; d) $(-\infty; 34, 8)$.
- Notati funcția:
a) g definită pe mulțimea D cu valori în F ; b) h definită pe mulțimea E cu valori în G ;
c) i definită pe mulțimea K cu valori în L ; d) j definită pe mulțimea I cu valori în J .
- Recunoașteți diagramele ce definesc funcții:



- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului x^2 .
a) Completați tabelul de valori:
b) Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului x^3 .
a) Completați tabelul de valori:
b) Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului x^4 .
a) Completați tabelul de valori:
b) Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 2^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 3^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 4^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 7^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 8^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x)$ este cifra unităților (ultima cifră a) numărului 9^x . Aflați $\text{Im } f$.
- Enumerați elementele și $\text{Im } f$ ale funcției:
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{7}$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{61}$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{21}$.
- Enumerați elementele și $\text{Im } f$ ale funcției:
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3}x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{5}x + 2$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 65, 2x + 2, (4)$,
- Enumerați elementele și $\text{Im } f$ ale funcției: a) $f: [-3, 7] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$; a) $f: [-5, 9] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x$.



2. Funcția de gradul II

• **Căderea liberă.** Lăsând să cadă diferite corpuri din turnul din Pisa, Galileo Galilei (1564 – 1642) a constatat că durata căderii unui corp nu depinde de masa corpului. El a formulat legile căderii libere a corpurilor.

De exemplu, înălțimea h de la care cade un corp se calculează aplicând formula $h = 0,5gt^2$, unde g este accelerația gravitațională $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, iar t este intervalul de timp. Înălțimea de la care cade un corp este o funcție de gradul II cu variabila t .

• Funcția de gradul II este o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\rightarrow 9 \rightarrow$	$4 \rightarrow$	$1 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$1 \rightarrow$	$4 \rightarrow$	$9 \rightarrow$

Funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(0, 0)$.

Zeroul funcției este 0.

Funcția are o valoare minimă, $f_{\min} = 0$. $f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,5x^2$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	$\rightarrow -8 \rightarrow$	$-2 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$-2 \rightarrow$	$-8 \rightarrow$

Funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$;

strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(0, 0)$.

Zeroul funcției este 0.

Funcția are o valoare maximă, $f_{\max} = 0$. $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

Funcțiile de gradul II incomplete $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}^*$.

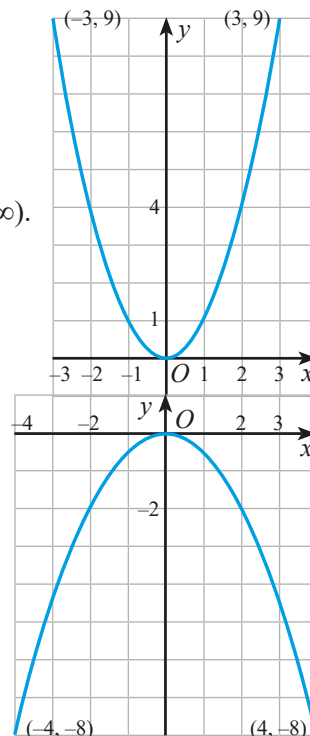
Graficul funcției este o **parabolă cu vârful în origine**. Axa Oy este **axa de simetrie** a parabolei.

Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Funcția are valoarea minimă $f_{\min} = 0$. $f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. Funcția are valoarea maximă $f_{\max} = 0$. $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R}^*$.

■ Exerciții

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Copiați și apoi completați propozițiile adevărate:
 - Graficul funcției este ...
 - Axa Oy este ...
- Monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Copiați și apoi completați propozițiile adevărate:
 - Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe ...; strict crescătoare pe ...
 - Dacă $a > 0$, funcția are valoarea minimă ...
 - Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe ...; strict descrescătoare pe ...
 - Dacă $a < 0$, funcția are valoarea maximă ...
- Precizați monotonia funcției:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2$.
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2,8x^2$.
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,3x^2$.



d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,25x^2$. e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{3}x^2$. f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{5}x^2$.

4. Precizați monotonia funcției:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,21x^2$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x^2$.

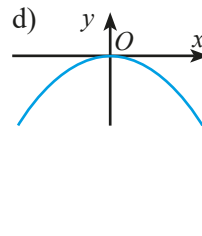
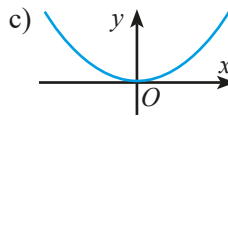
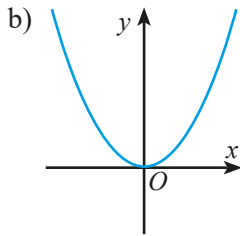
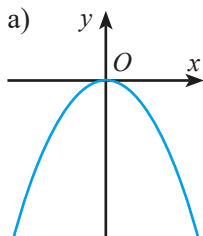
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6,3x^2$.

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 8,2x^2$.

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{31}x^2$.

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{26}x^2$.

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Comparați a cu 0, dacă graficul lui f este:



6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Indicați prin săgeți monotonia în tabel, dacă:

a) $a > 0$;

x	0
$f(x)$	

b) $a < 0$;

x	0
$f(x)$	

c) $a > 0$;

x	0
$f(x)$	

d) $a < 0$.

x	0
$f(x)$	

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Reprezentați graficul funcției f , dacă:

a) $f(x) = 2x^2$; b) $f(x) = 3x^2$; c) $f(x) = 4x^2$; d) $f(x) = 5x^2$.

8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Reprezentați graficul funcției f , dacă:

a) $f(x) = -2x^2$; b) $f(x) = -3x^2$; c) $f(x) = -4x^2$; d) $f(x) = -5x^2$.

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Reprezentați graficul funcției f , dacă:

a) $f(x) = 0,5x^2$; b) $f(x) = 0,25x^2$; c) $f(x) = 0,2x^2$; d) $f(x) = 0,5x^2$.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Reprezentați graficul funcției f , dacă:

a) $f(x) = -0,5x^2$; b) $f(x) = -0,25x^2$; c) $f(x) = -0,2x^2$; d) $f(x) = -0,5x^2$.

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Aflați a , dacă graficul lui f conține punctul:

a) (2, 20); b) (10, 30); c) (5, 175); d) (6, 144).

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Aflați a , dacă graficul lui f conține punctul:

a) (2, -20); b) (10, -30); c) (5, -175); d) (6, -144).

13. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g , dacă:

a) $f(x) = 2x^2$ și $g(x) = 3$; b) $f(x) = 0,2x^2$ și $g(x) = 8$; c) $f(x) = 4x^2$ și $g(x) = 7$.

14. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g , dacă:

a) $f(x) = -0,5x^2$ și $g(x) = -4$; b) $f(x) = -0,4x^2$ și $g(x) = -5$; c) $f(x) = -3x^2$ și $g(x) = -9$.

15. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați a , dacă unul dintre punctele de intersecție al graficelor celor două funcții:

a) este (2, 4); b) este (3, 6); c) este (1, 12); d) este (4, 18); e) este (6, 30).

16. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați a , dacă unul dintre punctele de intersecție al graficelor celor două funcții:

a) este (-5, 30); b) este (-6, 24); c) este (-8, 40); d) este (-3, 32); e) este (-16, 48).

17. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g , dacă:

a) $f(x) = 2x^2$ și $g(x) = -x + 1$; b) $f(x) = -2x^2$ și $g(x) = x - 1$; c) $f(x) = 4x^2$ și $g(x) = 4x - 1$.

3. Funcții de gradul II de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + b, ab < 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,5x^2 - 1$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-4	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	4
$f(x)$	7	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	-1 $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 7
semn f		+	0	-	0	+	

Funcția f este:

strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(-\sqrt{2}, 0)$ și $(\sqrt{2}, 0)$.

$0,5x^2 - 1 = 0$ are soluțiile reale $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$, iar acestea sunt zerourile funcției f .

Funcția are o valoare minimă, $f_{\min} = -1$. Punctul $V(0, -1)$ este vârful parabolei.

Semnul funcției: $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$; $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [-1, \infty)$.

- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,25x^2 + 1$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	-3	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	1 $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ -3
semn f	-	0	+	0	-

Funcția f este:

strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(-2, 0)$ și $(2, 0)$. $-0,25x^2 + 1 = 0$ are soluțiile -2 și 2 , iar acestea sunt zerourile funcției f (soluțiile reale ale ecuației $-0,25x^2 + 1 = 0$).

Funcția are o valoare maximă, $f_{\max} = 1$. Punctul $V(0, 1)$ este vârful parabolei.

Semnul funcției: $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru $x \in (-2, 2)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, 1]$.

Funcțiile de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + b, ab < 0$. Graficul funcției este o **parabolă cu vârful în punctul $V(0, b)$** . Axa Oy este axa de simetrie a parabolei.

Zerourile funcției f sunt $x_1 = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$ și $x_2 = \sqrt{-\frac{b}{a}}$. Graficul funcției f intersectează axa Ox în $\left(-\sqrt{-\frac{b}{a}}, 0\right)$ și $\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}, 0\right)$. x_1 și x_2 ($x_1 < x_2$) sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + b = 0$.

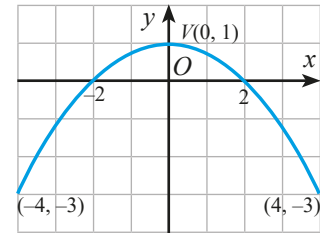
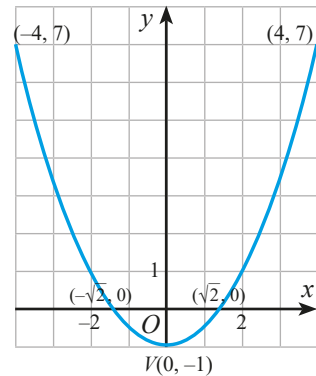
Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Funcția are valoarea minimă $f_{\min} = f(0) = b$. Vârful parabolei este $V(0, f_{\min})$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [b, \infty)$.

Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$; strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. Funcția are valoarea maximă $f_{\max} = f(0) = b$. Vârful parabolei este $V(0, f_{\max})$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + b, ab \neq 0$, are semnul contrar numărului a pentru x din intervalul (x_1, x_2) și semnul lui a pentru x din $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, b]$.



■ Exerciții

- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Graficul funcției este ..
 - Axa Oy este ...
 - Zerourile funcției f sunt ...
 - Graficul funcției f intersectează axa Ox în ...
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Aflați zerourile funcției, dacă:
 - $f(x) = 5x^2 - 10$;
 - $f(x) = 4x^2 - 15$;
 - $f(x) = 8x^2 - 9$;
 - $f(x) = 2x^2 - 25$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Aflați intersecțiile graficului funcției cu axa Ox (zerourile), dacă:
 - $f(x) = -25x^2 + 7$;
 - $f(x) = -9x^2 + 8$;
 - $f(x) = -16x^2 + 9$;
 - $f(x) = -4x^2 + 25$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Aflați vârful parabolei, dacă:
 - $f(x) = -5x^2 + 9$;
 - $f(x) = -8x^2 + 9$;
 - $f(x) = -3x^2 + 2$;
 - $f(x) = -6x^2 + 11$.
- Monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe ...; strict crescătoare pe ...
 - Dacă $a > 0$, funcția are valoarea minimă ...
 - Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe ...; strict descrescătoare pe ...
 - Dacă $a < 0$, funcția are valoarea maximă ...
- Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = -5x^2 + 2$;
 - $f(x) = 7x^2 + 9$;
 - $f(x) = -0,4x^2 + 3$;
 - $f(x) = 13x^2 + 67$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab \neq 0$. Indicați prin săgeți monotonia în tabel, dacă:

a) $a > 0$;	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;"></td> </tr> </table>	x	0	$f(x)$	
x	0				
$f(x)$					
c) $a > 0$;	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;"></td> </tr> </table>	x	0	$f(x)$	
x	0				
$f(x)$					

b) $a < 0$;	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;"></td> </tr> </table>	x	0	$f(x)$	
x	0				
$f(x)$					
d) $a < 0$.	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">x</td> <td style="padding: 2px 10px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 2px 10px;"></td> </tr> </table>	x	0	$f(x)$	
x	0				
$f(x)$					
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 0,5x^2 - 2$;
 - $f(x) = 4x^2 - 9$;
 - $f(x) = 0,25x^2 - 4$;
 - $f(x) = 0,3x^2 - 3$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = -0,5x^2 + 2$;
 - $f(x) = -4x^2 + 9$;
 - $f(x) = -0,25x^2 + 4$;
 - $f(x) = -0,3x^2 + 3$.
- Copiați și completați propoziția adevărată:
 Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab < 0$, are semnul ...
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$. Aflați semnul funcției, dacă:
 - $f(x) = -4x^2 + 9$;
 - $f(x) = x^2 - 16$;
 - $f(x) = -9x^2 + 25$;
 - $f(x) = x^2 - 49$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$. Aflați a și b , dacă graficul lui f conține punctele:
 - $(0, -3)$ și $(2, 29)$;
 - $(0, -5)$ și $(3, 22)$;
 - $(0, -9)$ și $(2, 3)$;
 - $(0, -7)$ și $(2, 9)$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$. Aflați semnul funcției, dacă graficul lui f conține punctele:
 - $(0, 2)$ și $(-2, -10)$;
 - $(0, 5)$ și $(-3, -49)$;
 - $(0, -\sqrt{21})$ și $(-4, 6)$;
 - $(0, \sqrt{33})$ și $(-3, -\sqrt{17})$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$, $ab > 0$. Aflați zerourile funcției f , dacă există, știind că:
 - $f(x) = \sqrt{15}x^2 + 1$;
 - $f(x) = -x^2 - \sqrt{83}$;
 - $f(x) = -9x^2 - \sqrt{43}$;
 - $f(x) = x^2 + \sqrt{19}$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$. Aflați numerele a și b , dacă:
 - graficul funcției tangent dreptei $y = -4$ și are unul dintre zerouri $\sqrt{26}$;
 - graficul funcției tangent dreptei $y = 7$ și are unul dintre zerouri $-\sqrt{37}$;
 - graficul funcției tangent dreptei $y = -\sqrt{29}$ și are unul dintre zerouri $\sqrt{55}$;
 - graficul funcției tangent dreptei $y = \sqrt{62}$ și are unul dintre zerouri $-\sqrt{46}$.

Indicație. a) $f(0) = -4$ și $f(\sqrt{26}) = 0$.

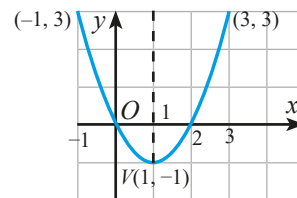
4. Funcții de gradul II de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3 $\rightarrow$	0 $\rightarrow$	-1 $\rightarrow$	0 $\rightarrow$	3
semn f	+	0	-	0	+



Funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$; strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(0, 0)$ și $(2, 0)$. $x^2 - 2x = 0$ are soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$, iar acestea sunt zerourile funcției f .

Funcția are o valoare minimă, $f_{\min} = -1$. Punctul $V(1, -1)$ este vârful parabolei. Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_v = 0,5(x_1 + x_2) = 1$. Dreapta $x = 1$ ($x = x_v$) este axa de simetrie a graficului funcției.

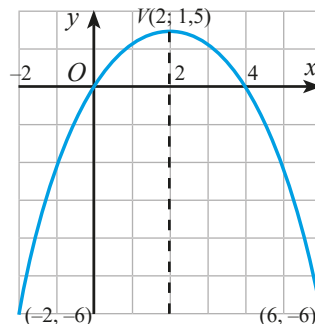
Semnul funcției: $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; $f(x) < 0$ pentru $x \in (0, 2)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [-1, \infty)$.

- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,5x^2 + 2x$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f

x	-2	0	2	4	6
$f(x)$	-6 $\rightarrow$	0 $\rightarrow$	1,5 $\rightarrow$	0 $\rightarrow$	-6
semn f	-	0	+	0	-



Funcția f este:

strict crescătoare pe $(-\infty, 2]$; strict descrescătoare pe $[2, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(0, 0)$ și $(4, 0)$.

$-0,5x^2 + 2x = 0$ are soluțiile 0 și 4, iar acestea sunt zerourile funcției f .

Funcția are o valoare maximă, $f_{\max} = 1,5$. Punctul $V(2; 1,5)$ este vârful parabolei. Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_v = 0,5(x_1 + x_2) = 2$. Dreapta $x = 2$ ($x = x_v$) este axa de simetrie a graficului funcției.

Semnul funcției: $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru $x \in (0, 4)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, 1,5]$.

Funcțiile de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Graficul funcției este o **parabolă cu vârful în punctul $V(0; f(0,5x_2))$** .

Zerourile funcției f sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{b}{a}$. Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(0, 0)$ și $(-\frac{b}{a}, 0)$. x_1 și x_2 ($x_1 < x_2$) sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx = 0$.

Dacă $a > 0$ ($a < 0$), funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty; 0,5x_2]$ ($[0,5x_2; \infty)$); strict crescătoare pe $[0,5x_2; \infty)$ ($(-\infty; 0,5x_2]$). Funcția are $f_{\min} = f(0,5x_2)$ ($f_{\max} = f(0,5x_2)$).

Dreapta $x = x_v$ este **axa de simetrie a graficului funcției**.

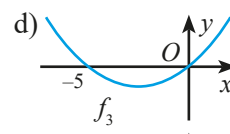
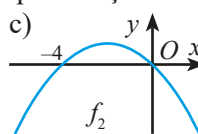
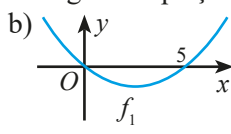
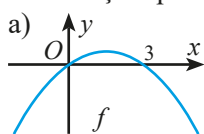
Dacă $a > 0$, mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty)$.

Dacă $a < 0$, mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}]$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$, are semnul contrar numărului a pentru x din intervalul (x_1, x_2) și semnul lui a pentru x din $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

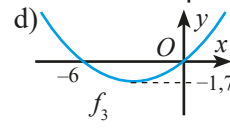
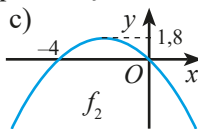
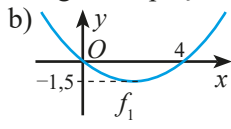
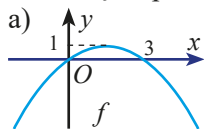
■ Exerciții

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Graficul funcției este ...
 - Zerourile funcției f sunt ...
 - Graficul funcției f intersectează axa Ox în ...
- Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 3x^2 + 4x$;
 - $f(x) = 5x^2 - 7x$;
 - $f(x) = 5x^2 - 8x$;
 - $f(x) = 2x^2 - 5x$.
- Aflați intersecțiile graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu axa Ox , dacă:
 - $f(x) = 9x^2 + 5x$;
 - $f(x) = -4x^2 + 3x$;
 - $f(x) = 8x^2 - 3x$;
 - $f(x) = -5x^2 + 2x$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx$. Aflați vârful parabolei, dacă:
 - $f(x) = x^2 - 8x$;
 - $f(x) = -x^2 + 6x$;
 - $f(x) = -3x^2 + 12x$;
 - $f(x) = -8x^2 + 16x$.
- Monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe ...; strict crescătoare pe ...
 - Dacă $a > 0$, funcția are valoarea minimă ...
 - Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe ...; strict descrescătoare pe ...
 - Dacă $a < 0$, funcția are valoarea maximă ...
- Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 5x^2 + 10x$;
 - $f(x) = 2x^2 + 18x$;
 - $f(x) = 3x^2 + 24x$;
 - $f(x) = 7x^2 + 35x$.
- Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = -5x^2 + 7x$;
 - $f(x) = -2x^2 + 12x$;
 - $f(x) = -6x^2 + 8x$;
 - $f(x) = -2x^2 + 5x$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Copiați și completați propoziția adevărată:
 Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$, are semnul ...
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Aflați semnul funcției, dacă:
 - $f(x) = 8x^2 + 3x$;
 - $f(x) = 9x^2 - 5x$;
 - $f(x) = 4x^2 - 9x$;
 - $f(x) = 5x^2 - 8x$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx$. Aflați semnul funcției, dacă:
 - $f(x) = -2x^2 + x$;
 - $f(x) = -x^2 - 9x$;
 - $f(x) = -4x^2 - 12x$;
 - $f(x) = -5x^2 + 15x$.
- Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = -2x^2 - 4x$;
 - $f(x) = -2x^2 - 6x$;
 - $f(x) = 0,25x^2 - 4x$;
 - $f(x) = 0,5x^2 - 2x$.
- Fie situațiile prezentate în imagini. Copiați imaginile și procedați ca în indicație.



Indicație. Se completează pe desen semnul funcției și se constată că:
 $g(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$; $g(x) < 0$ pentru $x \in (-3, 0)$.

- Fie situațiile prezentate în imagini. Copiați imaginile și procedați ca în indicație.



Indicație. Se completează pe desen semnul funcției, vârful parabolei $V(-2,5; -1)$.

Se constată că: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx$, unde $-\frac{b}{a} = -5, a = 1$; axa parabolei este $x = -2,5$. Rezultă $g(x) = 0,16x^2 + 0,8x$.

- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx, ab \neq 0$. Aflați a și b , dacă:

- f are unul din zerouri 3, iar graficul funcției f este tangent dreptei $y = -2$;
- f are unul din zerouri $-1,5$, iar graficul funcției f este tangent dreptei $y = 4$;
- f are unul din zerouri 3,6, iar graficul funcției f este tangent dreptei $y = -4,2$.

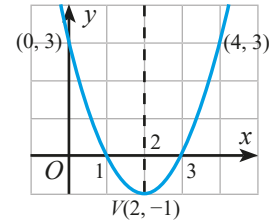
5. Funcții de gradul II de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, \Delta > 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	$\rightarrow$ 0	$\rightarrow$ -1	$\rightarrow$ 0	$\rightarrow$ 3
semn f	+	0	-	0	+



Funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 2]$; strict crescătoare pe $[2, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(1, 0)$ și $(3, 0)$. $x^2 - 4x + 3 = 0$ are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$, iar acestea sunt zerourile funcției f .

Graficul funcției f intersectează axa Oy în $(0, f(0)) = (0, 3)$.

Funcția are o valoare minimă, $f_{\min} = -1$. Punctul $V(2, -1)$ este vârful parabolei. Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_v = 0,5(x_1 + x_2) = 2$.

Dreapta $x = 2$ ($x = x_v$) este axa de simetrie a graficului funcției f .

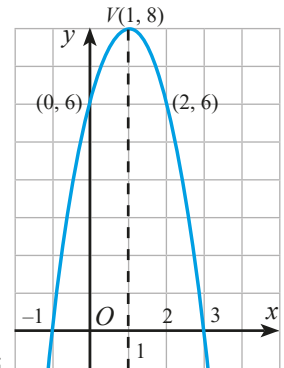
Semnul funcției f : $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$; $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (1, 3)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [-1, \infty)$.

- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\rightarrow$ 6	$\rightarrow$ 8	$\rightarrow$ 6	$\rightarrow$ 0
semn f	-	0	+	0	-



Funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$; strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

Graficul funcției f intersectează axa Ox în $(-1, 0)$ și $(3, 0)$.

$-2x^2 + 4x + 6 = 0$ are soluțiile -1 și 3 , iar acestea sunt zerourile funcției f .

Graficul funcției f intersectează axa Oy în $(0, f(0)) = (0, 6)$.

Funcția are o valoare maximă, $f_{\max} = 8$. Punctul $V(1, 8)$ este vârful parabolei.

Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_v = 0,5(x_1 + x_2) = 1$.

Dreapta $x = 1$ ($x = x_v$) este axa de simetrie a graficului funcției f .

Semnul funcției f : $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, 3)$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, 8]$.

Funcțiile de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$. Graficul funcției este o **parabolă cu vârful în punctul** $V(x_v, f(x_v))$, $x_v = 0,5(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}$.

Zerourile funcției f sunt x_1 și x_2 , soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Graficul funcției f intersectează: axa Ox în $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$; axa Oy în $(0, b)$.

Dacă $a > 0$ ($a < 0$), funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, x_v]$ ($[x_v, \infty)$); strict crescătoare pe (x_v, ∞) ($(-\infty, x_v]$). Funcția are valoarea minimă, $f_{\min} = f(x_v)$ (pentru $a < 0$ valoarea maximă $f_{\max} = f(x_v)$). Dreapta $x = x_v$ este **axa de simetrie** a graficului funcției f .

Dacă $a > 0$ mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty)$, $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$.

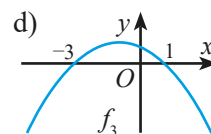
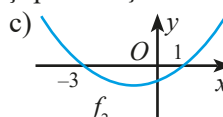
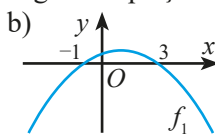
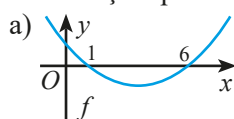
Dacă $a < 0$ mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}]$, $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.

Funcția f are semnul contrar numărului a pentru orice x din intervalul (x_1, x_2) și semnul lui a pentru orice x din $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

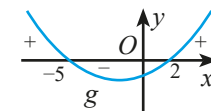
■ Exerciții

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $abc \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Copiați și completați propozițiile:
 a) Graficul funcției este ... b) $x_V = \dots$ c) Zerourile funcției f sunt ...
 d) Graficul funcției f intersectează axa Ox în ... și axa Oy în ...
2. Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; d) $f(x) = x^2 + 4x - 5$.
3. Aflați intersecțiile graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu axele Ox și Oy , dacă:
 a) $f(x) = x^2 + 8x - 9$; b) $f(x) = x^2 - 5x - 9$; c) $f(x) = x^2 - 7x - 8$; d) $f(x) = x^2 + 2x - 9$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați vârful parabolei, dacă:
 a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$; b) $f(x) = -x^2 - 7x + 30$; c) $f(x) = x^2 - 11x + 24$; d) $f(x) = -x^2 - 9x + 36$.
5. Monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $abc \neq 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 a) Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe ...; strict crescătoare pe ...
 b) Dacă $a > 0$, funcția are valoarea minimă ...
 c) Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe ...; strict descrescătoare pe ...
 d) Dacă $a < 0$, funcția are valoarea maximă ...
6. Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 4$; b) $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$; c) $f(x) = 3x^2 + 21x - 1$; d) $f(x) = 9x^2 + 16x - 5$.
7. Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 a) $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$; b) $f(x) = -3x^2 + 14x + 4$; c) $f(x) = -2x^2 + 10x + 7$; d) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.
8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Copiați și completați propoziția adevărată:
 Funcția f are semnul ...
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați semnul funcției, dacă:
 a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$; b) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$; c) $f(x) = 4x^2 + x - 3$; d) $f(x) = 5x^2 - 9x + 4$.
10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați semnul funcției, dacă:
 a) $f(x) = -6x^2 - 7x + 10$; b) $f(x) = -2x^2 - x + 6$; c) $f(x) = -2x^2 - x + 10$; d) $f(x) = -4x^2 - x + 3$.
11. Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; d) $f(x) = x^2 + 4x - 5$;
 e) $f(x) = -x^2 - 8x + 9$; f) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$; g) $f(x) = -x^2 + 7x + 8$.

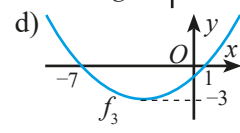
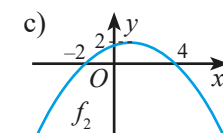
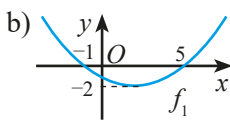
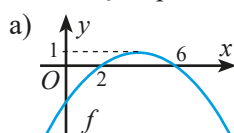
12. Fie situațiile prezentate în imagini. Copiați imaginile și procedați ca în indicație.



Indicație. Se completează pe desen semnul funcției și se constată: $g(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -5) \cup (2, \infty)$; $g(x) < 0$ pentru $x \in (-5, 2)$.

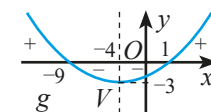


13. Fie situațiile prezentate în imagini. Copiați imaginile și procedați ca în indicație.



Indicație. Se completează pe desen semnul funcției, vârful parabolei $V(-4; -3)$.

Se constată că: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, unde $-\frac{b}{a} = -8$, $g(-4) = -3$;
 axa parabolei este $x = -4$. Rezultă $g(x) = 0,2x^2 + 1,6x - 1,8$.



14. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $abc \neq 0$. Aflați a , b și c , dacă:

- a) f are unul dintre zerouri 3, graficul lui f are axa de simetrie $x = 1$ și este tangent dreptei $y = -2$;
- b) f are unul dintre zerouri -5 , graficul lui f are axa de simetrie $x = -2$ și este tangent dreptei $y = 3$.

6. Funcții de gradul II de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, \Delta < 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	3	1	3	7
semn f	+		+		+

Funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$; strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

Graficul funcției f nu intersectează axa Ox . $2x^2 - 4x + 3 = 0$ nu are soluții reale.

Graficul funcției f intersectează axa Oy în $(0, f(0)) = (0, 3)$.

Funcția are o valoare minimă, $f_{\min} = 1$. Punctul $V(1, 1)$ este vârful parabolei. Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$.

Dreapta $x = 1$ ($x = x_V$) este **axa de simetrie** a graficului funcției f .

Semnul funcției f : $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [1, \infty)$, $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$.

- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,5x^2 + x - 1$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-2	0	1	2	4
$f(x)$	-5	-1	-0,5	-1	-5
semn f	-		-		-

Funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, 1]$; strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

Graficul funcției f nu intersectează axa Ox . $-0,5x^2 + x - 1 = 0$ nu are soluții reale.

Graficul funcției f intersectează axa Oy în $(0, f(0)) = (0, -1)$.

Funcția are o valoare maximă, $f_{\max} = -0,5$. Punctul $V(1; -0,5)$ este vârful parabolei. Se constată că abscisa vârfului parabolei este $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$. Dreapta $x = 1$ ($x = x_V$) este **axa de simetrie** a graficului funcției f .

Semnul funcției f : $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}]$, $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.

Funcțiile de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, \Delta = b^2 - 4ac < 0$. Graficul funcției este o parabolă cu vârful în punctul $V(x_V, f(x_V))$, $x_V = -\frac{b}{2a}$.

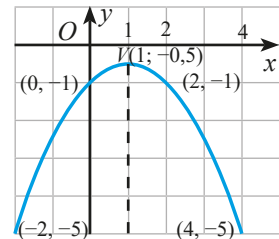
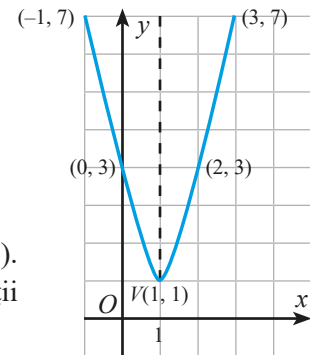
Graficul funcției f : nu intersectează axa Ox ; intersectează axa Oy în punctul $(0, c)$.

Dacă $a > 0$ ($a < 0$), funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, x_V]$ ($[x_V, \infty)$); strict crescătoare pe $[x_V, \infty)$ ($(-\infty, x_V]$). Funcția are valoarea minimă $f_{\min} = f(x_V)$ (valoarea maximă $f_{\max} = f(x_V)$). Dreapta $x = x_V$ este axa de simetrie a graficului funcției f .

Funcția f are semnul numărului a pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

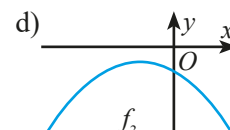
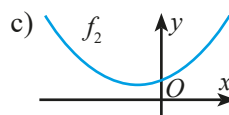
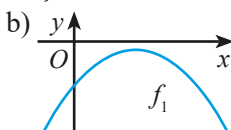
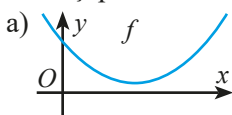
Dacă $a > 0$ mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty)$, $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$.

Dacă $a < 0$ mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}]$, $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.

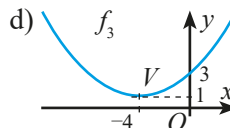
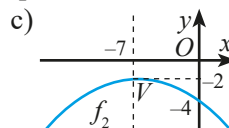
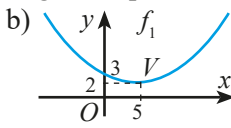
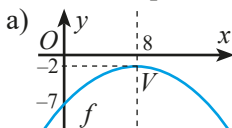


■ Exerciții

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Graficul funcției este ... b) $x_V = \dots$ c) Graficul funcției f nu intersectează ...
2. Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x) = x^2 + 4x + 7$; b) $f(x) = x^2 - 5x + 8$; c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; d) $f(x) = x^2 + 2x + 5$.
3. Aflați intersecțiile graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu axele Ox și Oy , dacă:
a) $f(x) = x^2 + 4x + 9$; b) $f(x) = x^2 - 2x + 7$; c) $f(x) = x^2 - 4x + 8$; d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați vârful parabolei, dacă:
a) $f(x) = x^2 - 8x + 17$; b) $f(x) = x^2 - 10x + 30$; c) $f(x) = -x^2 - 12x - 37$; d) $f(x) = -x^2 - 14x - 51$.
5. Monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $abc \neq 0$, $\Delta < 0$. Copiați și completați:
a) Dacă $a > 0$, funcția f este: strict descrescătoare pe ...; strict crescătoare pe ...
b) Dacă $a > 0$, funcția are valoarea minimă ...
c) Dacă $a < 0$, funcția f este: strict crescătoare pe ...; strict descrescătoare pe ...
d) Dacă $a < 0$, funcția are valoarea maximă ...
6. Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 33$; c) $f(x) = 3x^2 - 8x + 6$; d) $f(x) = 9x^2 + 18x + 10$.
7. Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x) = -5x^2 + 3x - 2$; b) $f(x) = -3x^2 + 14x - 18$; c) $f(x) = -2x^2 + 10x - 13$; d) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$.
8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Copiați și completați propoziția adevărată:
Funcția f are semnul ...
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați semnul funcției, dacă:
a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$; b) $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$; c) $f(x) = 4x^2 + x + 3$; d) $f(x) = 5x^2 - 9x + 4$.
10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați semnul funcției, dacă:
a) $f(x) = -6x^2 + 7x - 10$; b) $f(x) = -2x^2 + x - 1$; c) $f(x) = -2x^2 + x - 10$; d) $f(x) = -4x^2 + x - 3$.
11. Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; c) $f(x) = x^2 - 4x + 8$; d) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;
e) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$; f) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$; g) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$; h) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$.
12. Indicați pe desen semnul funcției.



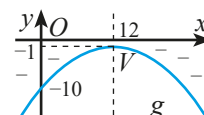
13. Fie situațiile prezentate în imagini. Copiați imaginile și procedați ca în indicație.



Indicație. Se completează pe desen semnul, vârful parabolei $V(12, -1)$.

Se constată că: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, unde $-\frac{b}{2a} = 12$, $g(12) = -1$, $g(0) = -10$; axa de simetrie a parabolei este $x = 12$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} b = -24a \\ 48a + 4b = 3 \end{cases}$, rezultă că $g(x) = -0,0625x^2 + 1,5x - 10$.



14. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $abc \neq 0$. Aflați a , b și c , dacă:
a) graficul lui f intersectează axa Oy în $(0, 5)$, graficul lui f are axa de simetrie $x = 1$ și este tangent dreptei $y = 1$;
b) graficul lui f intersectează axa Oy în $(0, -8)$, graficul lui f are axa de simetrie $x = -1$ și este tangent dreptei $y = -1,2$.

7. Proprietățile funcției de gradul II $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, a > 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 12x + 1$.

Rezolvare. Se constată că: $4x^2 - 12x + 9 - 9 + 1 = (2x - 3)^2 - 8$. Deoarece $(2x - 3)^2 \geq 0$ și $(2x - 3)^2 = 0$ pentru $x = 1,5$, rezultă că $(2x - 3)^2 - 8 \geq -8$ și are valoarea -8 pentru $x = 1,5$. Prin urmare, $f(x) = (2x - 3)^2 - 8 \geq -8$ și are valoarea -8 pentru $x = 1,5$. Funcția f are cea mai mică valoare (valoarea minimă) în $x_v = -\frac{b}{2a} = 12 : 8 = 1,5$ și $f_{\min} = f(1,5) = -8$. $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{128}{16} = -8$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [-8, \infty)$,

Axa de simetrie a graficului este $x = 1,5$.

- 2) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Rezolvare. Se constată că: $2x^2 - 4x + 5 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2(x - 1)^2 + 3$. Deoarece $(x - 1)^2 \geq 0$ și $(x - 1)^2 = 0$ pentru $x = 1$, rezultă că $2(x - 1)^2 + 3 \geq 3$ și are valoarea 3 pentru $x = 1$. Prin urmare, $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3 \geq 3$ și are valoarea 3 pentru $x = 1$. Funcția f are cea mai mică valoare (valoarea minimă) în $x_v = -\frac{b}{2a} = 1$ și $f_{\min} = f(1) = 3$. $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-24}{8} = 3$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = [f_{\min}, \infty) = [3, \infty)$.

Axa de simetrie a graficului este $x = 1$.

- 3) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$.

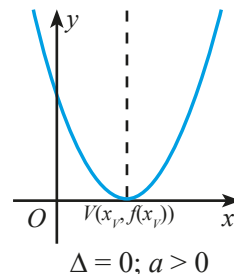
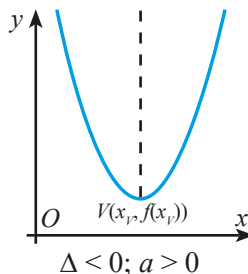
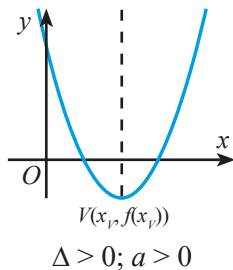
Rezolvare. Se constată că: $ax^2 + bx + c = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a} = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{(2ax + b)^2 - \Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$,

deoarece $(2ax + b)^2 \geq 0$ și $a > 0$. Prin urmare, $f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, a > 0, \Delta = b^2 - 4ac$.

Funcția f are valoarea minimă $f_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

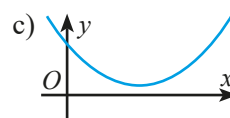
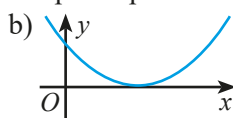
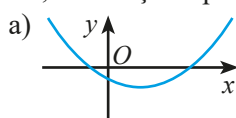
Funcția f este: strict descrescătoare pe $(-\infty, x_v]$; strict crescătoare pe $[x_v, \infty)$.



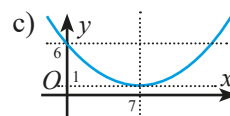
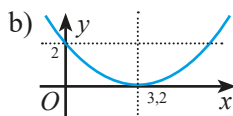
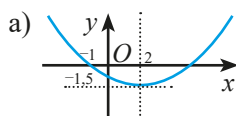
Coordonatele vârfului parabolei sunt: $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. $x = x_v$ - axa de simetrie a parabolei.

■ Exerciții

1. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = x^2 + 14x + 7$; b) $f(x) = x^2 - 10x + 8$; c) $f(x) = x^2 - 8x + 3$; d) $f(x) = x^2 + 12x + 5$.
2. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = x^2 + 18x + 82$; b) $f(x) = x^2 - 8x + 17$; c) $f(x) = x^2 - 6x + 10$; d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
3. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = 4x^2 + 28x$; b) $f(x) = 4x^2 - 20x$; c) $f(x) = 16x^2 - 8x$; d) $f(x) = 9x^2 + 6x$.
4. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = 81x^2 + 36x + 1$; b) $f(x) = 9x^2 - 36x + 2$; c) $f(x) = 16x^2 - 24x + 3$; d) $f(x) = 4x^2 + 20x + 24$.
5. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = 49x^2 + 28x + 5$; b) $f(x) = 9x^2 - 12x + 6$; c) $f(x) = 16x^2 - 24x + 10$; d) $f(x) = 4x^2 + 20x + 30$.
6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Examinați graficul și decideți dacă $f(x)$ se poate scrie ca sumă de pătrate, diferență de pătrate, sau este un pătrat perfect.



7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculați discriminantul și decideți dacă $f(x)$ se poate scrie ca sumă de pătrate, diferență de pătrate, sau este un pătrat perfect.
a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = 5x^2 + 12x + 8$; c) $f(x) = 16x^2 + 12x - 1$; d) $f(x) = 49x^2 + 14x + 1$;
e) $f(x) = 5x^2 + 6x + 3$; e) $f(x) = x^2 + 15x + 26$; f) $f(x) = 25x^2 - 20x + 4$; g) $f(x) = 10x^2 - 22x + 13$.
8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Funcția f are valoarea ... b) Funcția f este: strict descrescătoare ...; strict crescătoare ...
c) Coordonatele vârfului parabolei sunt: ...
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați abscisa vârfului parabolei $y = ax^2 + bx + c$.
a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 4$; b) $f(x) = 9x^2 - 15x + 25$; c) $f(x) = 8x^2 - 5x - 4$; d) $f(x) = 9x^2 + 10x - 3$.
10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați ordonata vârfului parabolei $y = ax^2 + bx + c$.
a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$; b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$; c) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4,5$; d) $f(x) = 5x^2 - 11x + 4$.
11. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Precizați, dacă funcția are sau nu are valoare minimă:
a) $f(x) = 6x^2 + 7x - 11$; b) $f(x) = -2x^2 + x - 4$; c) $f(x) = 2x^2 + x - 13$; d) $f(x) = -5x^2 + x - 3$.
12. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Precizați monotonia funcției f , dacă:
a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$; b) $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$; c) $f(x) = 3x^2 - 9x + 5$; d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$.
13. Aflați valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu:
a) $f(x) = 5x^2 + 14x + 3$; b) $f(x) = 4x^2 - 15x + 7$; c) $f(x) = 9x^2 - 8x + 1$;
d) $f(x) = 32x^2 - 96x + 18$; e) $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$; f) $f(x) = 3x^2 - 8x + 6$.
14. Aflați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu:
a) $f(x) = 2x^2 + 15x + 2$; b) $f(x) = 7x^2 - 16x + 5$; c) $f(x) = 5x^2 - 9x + 8$;
d) $f(x) = 35x^2 - 34x + 11$; e) $f(x) = 5x^2 - 17x + 2$; f) $f(x) = 8x^2 - 15x + 4$.
15. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Copiați desenele.



- a) Completați în desen: al doilea zerou al funcției; coordonatele vârfului parabolei. Cu ajutorul informațiilor din desen aflați a , b și c .
- b) Completați în desen: coordonatele punctelor intrsecție ale graficului cu dreapta $y = 2$; coordonatele vârfului parabolei. Cu ajutorul informațiilor din desen aflați a , b și c .
- c) Cu ajutorul informațiilor din desen aflați a , b și c .

8. Proprietățile funcției de gradul II $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, a < 0$

■ Exerciții rezolvate

- 1) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 + 20x - 19$.

Rezolvare. Se constată că: $-5x^2 + 20x - 20 + 1 = -5(x^2 - 4x + 4) = -5(x - 2)^2 + 1$. Deoarece $(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -5(x - 2)^2 \leq 0$ rezultă că $-5(x - 2)^2 + 1 \leq 1$ și are valoarea 1 pentru $x = 2$.

Prin urmare, $f(x) = -5x^2 + 20x - 19 \leq 3$ și are valoarea 3 pentru $x = 2$. Funcția f are cea mai mare valoare (valoarea maximă) în $x_v = -\frac{b}{2a} = 20 : 10 = 2$ și $f_{\max} = f(2) = 1$. $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{20}{-20} = 1$.

Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, 1]$,

Axa de simetrie a graficului este $x = 2$.

- 2) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -9x^2 + 12x - 5$.

Rezolvare. Se constată că: $-9x^2 + 12x - 5 = -9x^2 + 12x - 4 - 1 = -(9x^2 - 12x + 4) - 1 = -(3x - 2)^2 - 1$. Deoarece $(3x - 2)^2 \geq 0, -(3x - 2)^2 \leq 0$ rezultă că $-(3x - 2)^2 - 1 \leq -1$ și are valoarea -1 pentru $x = 0, (6)$. Prin urmare, $f(x) = -(3x - 2)^2 - 1 \leq -1$ și are valoarea -1 pentru $x = 0, (6)$. Funcția f are

cea mai mare valoare (valoarea maximă) în $x_v = -\frac{b}{2a} = 0, (6)$ și $f_{\max} = f(0, (6)) = -1$. $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-36}{-36} = 1$. Mulțimea valorilor funcției este $E(f) = (-\infty, f_{\max}] = (-\infty, 1]$.

Axa de simetrie a graficului este $x = 0, (6)$.

- 3) Aflați valoarea extremă (minimă sau maximă) și mulțimea valorilor funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$.

Rezolvare. Se constată că: $ax^2 + bx + c = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a} = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac}{4a} =$

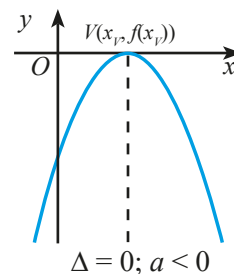
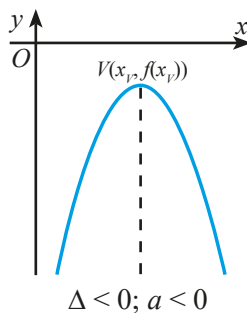
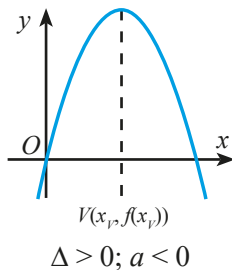
$$\frac{(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(2ax + b)^2 + \Delta}{4|a|} \leq -\frac{\Delta}{4a},$$

deoarece $(2ax + b)^2 \geq 0$ și $a < 0$. Prin urmare, $f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, abc \neq 0, a < 0, \Delta = b^2 - 4ac$.

Funcția f are valoarea maximă $f_{\max} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

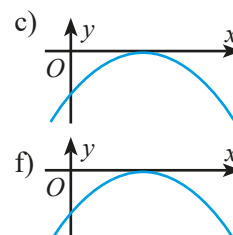
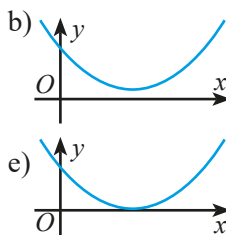
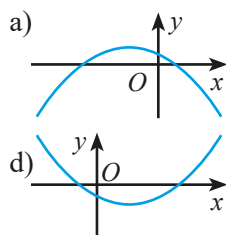
Funcția f este: strict crescătoare pe $(-\infty, x_v]$; strict descrescătoare pe $[x_v, \infty)$.



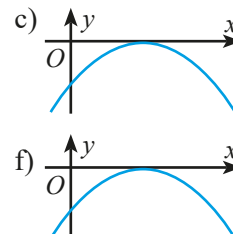
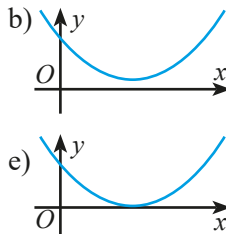
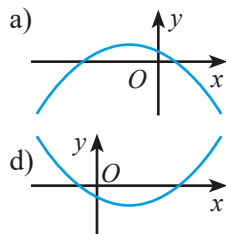
Coordonatele vârfului parabolei sunt: $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. $x = x_v$ - axa de simetrie a parabolei.

■ Exerciții

1. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = -x^2 + 14x - 24$; b) $f(x) = -x^2 - 10x + 5$; c) $f(x) = -x^2 - 6x + 3$; d) $f(x) = -x^2 + 12x - 11$.
2. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = -x^2 + 18x - 82$; b) $f(x) = -x^2 + 8x - 17$; c) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$; d) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.
3. Scrieți ca sumă sau diferență de pătrate:
a) $f(x) = -4x^2 + 32x$; b) $f(x) = -4x^2 - 28x$; c) $f(x) = -16x^2 - 24x$; d) $f(x) = -9x^2 + 12x$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Examinați graficul și decideți dacă $f(x)$ se poate scrie ca sumă de pătrate, diferență de pătrate, sau este un pătrat perfect.



5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculați discriminantul și decideți dacă $f(x)$ se poate scrie ca sumă de pătrate, diferență de pătrate sau este un pătrat perfect.
a) $f(x) = -5x^2 + 4x - 1$; b) $f(x) = -49x^2 + 28x - 4$; c) $f(x) = -6x^2 + 12x - 1$; d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$.
6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$. Completați propozițiile adevărate:
a) Funcția f are valoarea ... b) Funcția f este: strict descrescătoare ...; strict crescătoare ...
c) Coordonatele vârfului parabolei sunt: ...
7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați abscisa vârfului parabolei $y = ax^2 + bx + c$.
a) $f(x) = -3x^2 + 10x + 4$; b) $f(x) = -9x^2 - 16x + 25$; c) $f(x) = -8x^2 - 5x - 4$; d) $f(x) = -9x^2 + 10x - 3$.
8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați ordonata vârfului parabolei $y = ax^2 + bx + c$.
a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 2$; b) $f(x) = -3x^2 + 4x + 2$; c) $f(x) = -6x^2 + 18x - 13,5$; d) $f(x) = -5x^2 + 11x - 8$.
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Precizați, dacă funcția are valoare minimă sau valoare maximă:
a) $f(x) = 3x^2 + 7x - 11$; b) $f(x) = -5x^2 + x - 4$; c) $f(x) = 2x^2 + 9x - 13$; d) $f(x) = -5x^2 + 2x - 3$.
10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Precizați monotonia funcției f , dacă:
a) $f(x) = -3x^2 + 12x + 7$; b) $f(x) = 2x^2 - 12x + 9$; c) $f(x) = -3x^2 - 9x + 2$; d) $f(x) = 3x^2 - 3x + 8$.
11. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valoarea maximă a funcției, dacă:
a) $f(x) = -5x^2 + 2x + 8$; b) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$; c) $f(x) = -9x^2 + 4x + 1$; d) $f(x) = -8x^2 + 12x + 3$.
12. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Examinați graficele și comparați cu 0 coeficientul a și discriminantul Δ .



13. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați m astfel încât graficul lui f să fie tangent axei Ox .
a) $f(x) = 2x^2 + (m + 5)x + 3$; b) $f(x) = x^2 + (m + 3)x + 5$; c) $f(x) = 3x^2 + (m + 4)x + 6$.
14. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2m - 1)x^2 + 3x + 2$. Aflați m astfel încât graficul lui f să fie deasupra axei Ox .
a) $f(x) = (2m - 1)x^2 + 3x + 2$; b) $f(x) = (3m - 2)x^2 + 2x + 3$; c) $f(x) = (3m - 4)x^2 + 5x + 3$.
15. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (2m - 1)x^2 + 3x + 2$. Aflați m astfel încât graficul lui f să fie sub axa Ox .
a) $f(x) = (m - 14)x^2 + 2x + 3$; b) $f(x) = (8m - 1)x^2 + 5x + 1$; c) $f(x) = (9m - 1)x^2 + 2x + 0$.

9. Semnul funcției de gradul II

■ Exerciții rezolvate

- 1) Pentru a stabili semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 - 20x + 105$ se calculează $\Delta = 2\,500$. Ecuația $-5x^2 - 20x + 105 = 0$ are soluțiile -7 și 3 . Se obține $f(x) = -5x^2 - 20x + 105 = -5(x+7)(x-3)$.

x	-7	3
semn $(x+7)$	$-$	$+$
semn $(x-3)$	$-$	$+$
semn (-5)	$-$	$-$
semn $(f(x))$	$-$	$-$

$f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -7) \cup (3, \infty)$; $f(x) > 0$ pentru $x \in (-7, 3)$.

- 2) Pentru a stabili semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -12x^2 + 12x - 6$ se calculează $\Delta = -144$. $-12x^2 + 12x - 6 = 0$ nu are soluții reale și $-12x^2 + 12x - 6 = -3(4x^2 - 4x + 3) = -3[(2x-1)^2 + 1] < 0$ pentru orice număr real x . Prin urmare, $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, având $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Funcția are zerourile x_1 și x_2 , $x_1 < x_2$ și $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

x	x_1	x_2
semn $(x-x_1)$	semn $(-a)$	semn a
semn $(x-x_2)$	semn $(-a)$	semn a
semn a	semn a	semn a
semn $(f(x))$	semn a	semn a

- 4) Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, având $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Se constată că:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(2ax+b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{(2ax+b)^2 - \Delta}{4a} = \frac{(2ax+b)^2 + (-\Delta)}{4a}$$

are semnul lui a pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deoarece numărătorul ultimului raport este mai mare decât 0.

Funcția de gradul II $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Funcția are zerourile x_1 și x_2 , $x_1 < x_2$. Semnul funcției f este semnul lui a pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$; semnul funcției f este semnul lui $-a$ pentru $x \in (x_1, x_2)$.

Funcția de gradul II $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Funcția nu are zerouri. Semnul funcției f este semnul lui a pentru $x \in \mathbb{R}$.

Funcția de gradul II $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, are același semn pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Aflați valorile parametrului m pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m+2)x^2 + 3x + 1$, are același semn pentru orice x real.

Rezolvare. Trebuie ca $\Delta < 0$. $9 - 4(m+2) < 0 \Leftrightarrow 1 < 4m \Leftrightarrow m \in (0,25; \infty)$.

- 2) Aflați valorile parametrului m pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2m-1)x^2 + 8x + 2 > 0$ pentru orice x real.

Rezolvare. Trebuie ca $\Delta < 0$ și $2m-1 > 0$. $64 - 8(2m-1) < 0$ și $m > 0,5 \Leftrightarrow 1 - (2m-1) < 0$ și $m > 0,5 \Leftrightarrow 8 < 2m-1$ și $m > 0,5 \Leftrightarrow 9 < 2m$ și $m > 0,5 \Leftrightarrow m > 4,5$ și $m > 0,5 \Leftrightarrow m \in (4,5; \infty)$.

■ Exerciții

1. Completând un tabel, aflați semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = (x + 3)(x - 8)$;

x	
$\text{semn}(x + 3)$	
$\text{semn}(x - 8)$	
$\text{semn } f(x)$	

b) $f(x) = (x + 7)(x - 9)$;

x	
$\text{semn}(x + 7)$	
$\text{semn}(x - 9)$	
$\text{semn } f(x)$	

c) $f(x) = (x + 11)(x - 24)$;

x	
$\text{semn}(x + 11)$	
$\text{semn}(x - 24)$	
$\text{semn } f(x)$	

d) $f(x) = (x + 2,7)(x + 3,9)$

x	
$\text{semn}(x + 2,7)$	
$\text{semn}(x + 3,9)$	
$\text{semn } f(x)$	

2. Completând un tabel, aflați semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = (2x + 13)(4x - 5)$;

x	
$\text{semn}(2x + 13)$	
$\text{semn}(4x - 5)$	
$\text{semn } f(x)$	

b) $f(x) = (5x + 8)(9x - 4)$;

x	
$\text{semn}(5x + 8)$	
$\text{semn}(9x - 4)$	
$\text{semn } f(x)$	

c) $f(x) = (7x + 4)(3x + 8)$;

x	
$\text{semn}(7x + 4)$	
$\text{semn}(3x + 8)$	
$\text{semn } f(x)$	

d) $f(x) = (3x + 9)(4x + 12)$.

x	
$\text{semn}(3x + 9)$	
$\text{semn}(4x + 12)$	
$\text{semn } f(x)$	

3. Descompuneți în factori raționali:

a) $f(x) = x^2 + 8x + 9$;

b) $f(x) = x^2 - 6x + 6$;

c) $f(x) = x^2 - 10x + 8$;

d) $f(x) = x^2 + 12x + 7$.

4. Descompuneți în factori raționali:

a) $f(x) = x^2 + 18x + 89$;

b) $f(x) = x^2 - 6x + 12$;

c) $f(x) = x^2 - 10x + 27$;

d) $f(x) = x^2 + 12x + 40$.

5. Semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Funcția are zerourile x_1 și x_2 , $x_1 < x_2$. Copiați și completați propoziția adevărată:

Semnul funcției f ...

6. Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = 3x^2 + 8x - 5$;

b) $f(x) = 5x^2 + 14x - 8$;

c) $f(x) = 4x^2 + 10x - 3$;

d) $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$.

7. Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = -8x^2 + 2x + 1$;

b) $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$;

c) $f(x) = -3x^2 + 10x + 9$;

d) $f(x) = -2x^2 + 6x + 5$.

8. Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$;

b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$;

c) $f(x) = 4x^2 + x + 1$;

d) $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$;

e) $f(x) = -7x^2 + 2x - 1$;

f) $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$;

g) $f(x) = -9x^2 + 8x - 3$;

h) $f(x) = -5x^2 + 6x - 2$;

i) $f(x) = -5x^2 + 10x - 6$.

9. Aflați valorile parametrului m pentru care $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (3m - 2)x^2 + 9x + 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = (2m - 5)x^2 + 3x + 2 < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = (m - 5)x^2 + 6x + 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = (4m - 1)x^2 + 2x + 2 < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

10. Funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^3$

■ Exerciții rezolvate

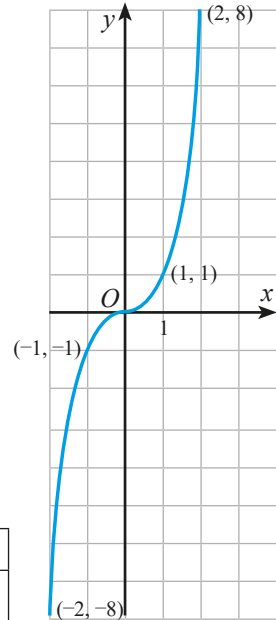
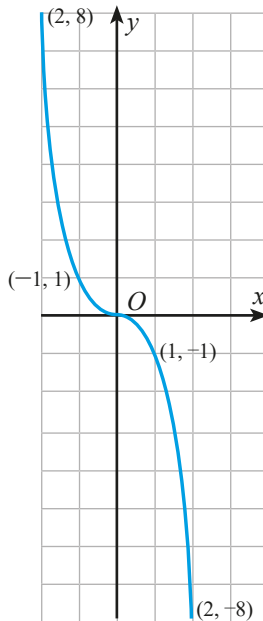
- 1) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\rightarrow -8$	$\rightarrow -1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 8$
semn f		-	0	+	

Funcția f este: strict crescătoare. Graficul funcției f intersectează axele de coordonate în $(0, 0)$.

Deoarece $f(x) = -f(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, graficul funcției f are **centrul de simetrie** $(0, 0)$. $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$; $f(x) > 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.



- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^4$. Studiați funcția f .

Rezolvare. Tabelul de valori al funcției f este:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\rightarrow 8$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 8$
semn f		+	0	-	

Funcția f este: strict crescătoare. Graficul funcției f intersectează axele de coordonate în $(0, 0)$.

Deoarece $f(x) = -f(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, graficul funcției f are **centrul de simetrie** $(0, 0)$. $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$; $f(x) < 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.

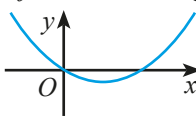
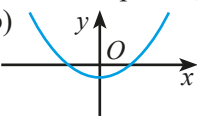
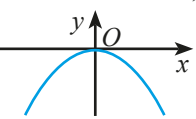
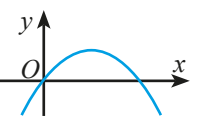
Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Funcția f este strict crescătoare și graficul ei este simetric față de punctul $(0, 0)$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3$. Funcția f este strict descrescătoare și graficul ei este simetric față de punctul $(0, 0)$.

■ Exerciții

- Aflați expresia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^3$, dacă graficul ei conține punctul:
 - $(-3, -54)$;
 - $(4, -64)$;
 - $(-1, 13)$;
 - $(2, -4)$.
- Aflați expresia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + 3$, dacă graficul ei conține punctul:
 - $(-2, 5)$;
 - $(-1, 7)$;
 - $(3, 30)$;
 - $(-4, 141)$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = x^3 + 2$;
 - $f(x) = x^3 - 2$;
 - $f(x) = x^3 + 3$;
 - $f(x) = x^3 - 3$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 0,5x^3$;
 - $f(x) = -0,5x^3$;
 - $f(x) = 0,1x^3$;
 - $f(x) = -0,1x^3$.
- Stabiliți monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 21x^3$;
 - $f(x) = -17x^3$;
 - $f(x) = 23x^3$;
 - $f(x) = -48x^3$.
- Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 6x^3$;
 - $f(x) = -3x^3$;
 - $f(x) = 11x^3$;
 - $f(x) = -4x^3$.
- Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = x^3 + 8$;
 - $f(x) = x^3 - 64$;
 - $f(x) = x^3 + 125$;
 - $f(x) = x^3 - 27$.
- Stabiliți semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = -x^3 + 343$;
 - $f(x) = -x^3 - 125$;
 - $f(x) = -x^3 + 8$;
 - $f(x) = -x^3 - 1$.

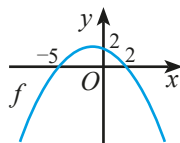
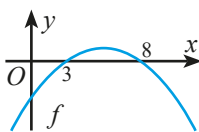
Sinteză

- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Reprezentați graficul funcției f , dacă:
 - $f(x) = 0,2x^2$; b) $f(x) = -0,4x^2$; c) $f(x) = -0,2x^2$; d) $f(x) = 0,4x^2$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 0,2x^2 - 3$; b) $f(x) = -0,4x^2 + 2$; c) $f(x) = 0,5x^2 - 4$; d) $f(x) = -0,25x^2 + 4$.
- Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 2x^2 - 6x$; b) $f(x) = 3x^2 - 9x$; c) $f(x) = -2x^2 + 6x$; d) $f(x) = -3x^2 + 9x$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alegeți varianta corectă pentru $f(x)$ (ax^2 , $ax^2 + b$, $ax^2 + bx$).
 - 
 - 
 - 
 - 
- Aflați intersecțiile graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu axele Ox și Oy , dacă:
 - $f(x) = x^2 - 8x - 9$; b) $f(x) = x^2 + 5x - 6$; c) $f(x) = -x^2 - 7x + 8$; d) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați vârful parabolei $y = f(x)$, dacă:
 - $f(x) = x^2 + 8x + 15$; b) $f(x) = -x^2 - 6x + 30$; c) $f(x) = x^2 + 11x + 24$; d) $f(x) = -x^2 + 9x + 36$.
- Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, și axa de simetrie a graficului ei, dacă:
 - $f(x) = 5x^2 - 4x - 4$; b) $f(x) = 2x^2 - 8x - 1$; c) $f(x) = -3x^2 + 18x + 1$; d) $f(x) = -9x^2 + 8x + 5$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = x^2 - 4x + 3$; b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$; c) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$; d) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.
- Aflați intersecțiile graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu axele Ox și Oy , dacă:
 - $f(x) = x^2 - 4x + 9$; b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$; c) $f(x) = -x^2 - 4x - 8$; d) $f(x) = -x^2 + 4x - 9$.
- Precizați monotonia funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 2x^2 + 5x + 4$; b) $f(x) = 2x^2 + 8x + 33$; c) $f(x) = -3x^2 - 8x - 6$; d) $f(x) = -9x^2 + 18x - 10$.
- Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = x^2 + 4x + 5$; b) $f(x) = x^2 + 4x + 7$; c) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$; d) $f(x) = -x^2 - 6x - 10$.
- Aflați semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 3x^2 - 8x - 5$; b) $f(x) = 5x^2 - 14x - 8$; c) $f(x) = -4x^2 - 10x + 3$; d) $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$.
- Aflați semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 - $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$; b) $f(x) = 9x^2 - 14x + 8$; c) $f(x) = -7x^2 + 10x - 4$; d) $f(x) = -5x^2 + 6x - 2$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valoarea maximă sau minimă a funcției, dacă:
 - $f(x) = 5x^2 + 2x + 8$; b) $f(x) = -9x^2 + 24x - 16$; c) $f(x) = -9x^2 + 4x - 1$; d) $f(x) = 8x^2 - 12x + 5$.
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (2m - 3)x^2 + 4x + 3$. Aflați m astfel încât $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (3m - 2)x^2 - 5x + 1$. Aflați m astfel încât $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (m - 6)x^2 + 7x - 1$. Aflați m astfel încât $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (2m - 7)x^2 + 3x - 2$. Aflați m astfel încât $f(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (m - 2)x^2 + 9x - 3$. Aflați m astfel încât $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = (3m - 8)x^2 + 6x - 4$. Aflați m astfel încât $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (5m - 2)x^2 + 2x - 7$. Aflați m astfel încât abscisa vârfului parabolei $y = f(x)$:
 - să fie egală cu 3; b) să aibă modulul egal cu 8.
- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2m - 5)x^2 + 4x - 9$. Aflați m astfel încât abscisa vârfului parabolei $y = f(x)$:
 - să fie între 2 și 10; b) să aibă modulul mai mic decât 4.

Evaluare

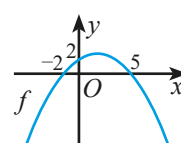
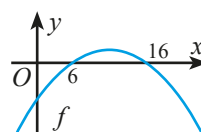
I

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Aflați a , dacă graficul lui f conține punctul $(5, -30)$. 10
2. Precizați monotonia funcției:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 19x$. 20
3. Aflați intersecțiile cu axele de coordonate ale graficului funcției:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^2 + 10x - 3$. 10
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați coordonatele vârfului graficului funcției cu $f(x) = 2x^2 + 15x - 6$. 10
5. Examinați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = ax^2 + bx + c,$
și completați: $a \dots 0$;
 $\Delta \dots 0$; axa parabolei este ... 10
6. Stabiliți semnul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 - 7x + 4$. 10
7. Reprezentați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 4x - 16$. 10
8. Examinați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = ax^2 + bx + c,$ și aflați:
a) a, b, c ;
b) coordonatele vârfului parabolei. 10
9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m-7)x^2 + 2x - 3$. Aflați m astfel încât $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 10



II

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2$. Aflați a , dacă graficul lui f conține punctul $(5, -40)$. 10
2. Precizați monotonia funcției:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - 21x$. 20
3. Aflați intersecțiile cu axele de coordonate ale graficului funcției:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 + 10x - 3$. 10
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați coordonatele vârfului graficului funcției cu $f(x) = 2x^2 + 13x - 4$. 10
5. Examinați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = ax^2 + bx + c,$
și completați: $a \dots 0$;
 $\Delta \dots 0$; axa parabolei este ... 10
6. Stabiliți semnul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -5x^2 - 9x + 3$. 10
7. Reprezentați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 4x - 16$. 10
8. Examinați graficul funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = ax^2 + bx + c,$ și aflați:
a) a, b, c ;
b) coordonatele vârfului parabolei. 10
9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m-8)x^2 + 3x - 2$. Aflați m astfel încât $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 10



Din istoria matematicii

François Viète cunoscut și sub numele latin *Franciscus Vieta* (1540–1603) a fost un avocat francez, matematician prin vocație. De aceea, rezultatele lui **François Viète** în matematică, i-au asigurat acestuia un loc în istoria matematicii alături de matematicienii profesioniști din toate vremurile.

În perioada 1584–1589 s-a dedicat în întregime matematicii. A dorit să redescopere și să continue matematica antică. Și-a făcut cunoscute rezultatele în cărți publicate pe cont propriu în limba latină, conform obiceiului din acea vreme. A fost primul care a folosit litere în locul numerelor (în cartea *In artem analyticam isagoge*): consoanele – pentru numere sau cantități cunoscute, vocalele – pentru numere sau cantități necunoscute.

Printre alte rezultate obținute de el amintim:

- identitățile algebrice (formulele de calcul prescurtat) unde menționăm cubul sumei;
- ecuația de gradul II.



François Viète
(1540–1603)

Suplimentar

1. Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă: a) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$; b) $f(x) = |x^2 + 5x + 6|$.
2. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2$, $h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 3) \\ f(x), & \text{dacă } x \in (0, 3). \end{cases}$
3. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $g(x) = -4$, $h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 3) \\ f(x), & \text{dacă } x \in (0, 3). \end{cases}$
4. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $g(x) = 2(6)x - 8$, $h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 3) \\ f(x), & \text{dacă } x \in (0, 3). \end{cases}$
5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + px + q$. Aflați valorile parametrilor p și q pentru care:
 - a) punctul $P(-1, 2)$ este vârful parabolei $y = x^2 + px + q$;
 - b) punctul $P(-2, 1)$ este vârful parabolei $y = x^2 + px + q$.
6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + px + q$. Aflați valorile parametrilor p și q pentru care:
 - a) punctul $P(-2, 1)$ aparține graficului și -3 este un zero al funcției f ;
 - b) punctul $P(-1, 3)$ aparține graficului și -2 este un zero al funcției f .
7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile reale ale parametrului pentru care graficul funcției f are un singur punct cu axa absciselor, dacă: a) $f(x) = mx^2 + 3x + m$; b) $f(x) = 4mx^2 + 5x + m$.
8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile reale ale parametrului pentru care funcția f are cel puțin un zero, dacă: a) $f(x) = -x^2 + 2mx - (m - 1)^2$; b) $f(x) = -x^2 + 6mx - (3m - 2)^2$.
9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile parametrului pentru care:
 - a) punctul $P(1, 3)$ este vârful parabolei graficului funcției $f(x) = x^2 - 2m^2x + m + 3$;
 - b) punctul $P(-1, 4)$ este vârful parabolei graficului funcției $f(x) = x^2 - 2m^2x - 3m + 4$.
10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = mx^2 - m^2 - m + 1$, $x = 1$ este zero al funcției f și graficul ei are ramurile orientate în sus;
 - b) $f(x) = mx^2 - m^2 - 4m + 2$, $x = 2$ este zero al funcției f și graficul ei are ramurile orientate în jos.
11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1$ și valoarea minimă a funcției f este 0,25;
 - b) $f(x) = x^2 - (6m - 1)x + 9m^2 + 1$ și valoarea minimă a funcției f este 0,75.
12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = mx - m^2 - m + 3$, $x = 1$ este zero al funcției f și funcția este strict crescătoare;
 - b) $f(x) = mx - m^2 - 2m + 4$, $x = 2$ este zero al funcției f și funcția este strict descrescătoare.
13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile reale ale parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = mx^2 - 5x - 3$, graficul funcției f are ramurile în sus și intersectează abscisa în două puncte;
 - b) $f(x) = mx^2 - 4x + 2$, graficul funcției f are ramurile în jos și intersectează abscisa în două puncte.
14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile reale ale parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = (m^2 - 2)x^2 + m$, graficul funcției f conține punctul $P(1, 4)$ și intersectează Oy într-un punct cu ordonata negativă;
 - b) $f(x) = (m^2 - 7)x^2 + 3m$, graficul funcției f conține punctul $P(-1, -3)$ și intersectează Oy într-un punct cu ordonata pozitivă.
15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Aflați valorile reale ale parametrului pentru care:
 - a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ și punctul $P(m, 2)$ este un punct al graficului din cadranul I;
 - b) $f(x) = x^2 + 5x - 8$ și punctul $P(m, -2)$ este un punct al graficului din cadranul III.

Ecuatii. Inecuatii. Sisteme

1. Noțiunea de ecuație

1) $3x + 15 = 22, x \in \mathbb{R}$, este o propoziție cu variabila x . Variabila poate fi înlocuită cu numere reale. Înlocuind x cu 2, (3), se obține o propoziție adevărată. Pentru alte valori reale ale lui x rezultă propoziții false.

2) $2x + y = 4, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, este o propoziție cu variabilele x și y . Înlocuind (x, y) cu $(0, 4)$, se obține o propoziție adevărată. Același rezultat se obține pentru $(x, y) = (2, 0)$.

Propoziția cu variabile de forma $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, este o **ecuație cu necunoscuta x** .

Ecuația $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, are **membrul stâng** $f_1(x)$ și **membrul drept** $f_2(x)$.

Se numește **soluție** a ecuației $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, numărul $a \in D$ pentru care $f_1(a) = f_2(a)$ este o propoziție adevărată.

Mulțimea soluțiilor unei ecuații este mulțimea tuturor soluțiilor ei și se notează, de obicei, S .

A rezolva o ecuație înseamnă a afla mulțimea soluțiilor acestei ecuații.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Fie ecuațiile: $5x + 7 = -8, x \in \mathbb{Z}; 5x = -7 - 8, x \in \mathbb{Z}; 5x = -15, x \in \mathbb{Z}; x = -3, x \in \mathbb{Z}$. Înlocuind x cu -3 în toate ecuațiile enumerate, se obțin propoziții adevărate. Toate aceste ecuații au mulțimea soluțiilor $S = \{-3\}$.
- 2) Fie ecuațiile: $\frac{x}{x+8} = 3, x \in \mathbb{Q}; DVA = \mathbb{Q} \setminus \{-8\}; 3x + 24 = x; 3x + 24 - x = x - x; 2x + 24 = 0; 2x = -24; x = -12, x \in DVA$. Înlocuind x cu -12 în toate ecuațiile enumerate, se obțin propoziții adevărate. Toate aceste ecuații au mulțimea soluțiilor, $S = \{-12\}$.

Ecuațiile cu același DVA, care au mulțimile soluțiilor egale se numesc **echivalente**.

Ecuația atașată unei funcții de gradul I se numește **ecuație de gradul I**. Cu ajutorul unei ecuații de gradul I se calculează zerourile funcției corespunzătoare.

Ecuația atașată unei ecuații de gradul II se numește **ecuație de gradul II**. Cu ajutorul unei ecuații de gradul II se calculează zerourile funcției corespunzătoare.

La rezolvarea unei ecuații de gradul I se aplică proprietățile relației de egalitate:

- 1) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$
- 2) $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c.$
- 3) Dacă $c \neq 0$, atunci $a = b \Leftrightarrow ac = bc.$
- 4) Dacă $c \neq 0$, atunci $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c.$

■ Exerciții

1. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) Propoziția cu variabile de forma $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, este ...
 - b) Ecuația $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, are ...
 - c) Se numește soluție a ecuației $f_1(x) = f_2(x), x \in D$, ...
 - d) Mulțimea soluțiilor unei ecuații ...
 - e) A rezolva o ecuație înseamnă ...
2. Recunoașteți ecuațiile din lista:
 - a) $2x = 4x + 1 = 5x - 3, x \in D; 3x + 15x + 12, x \in D; 6x = 13; 23x < 12, x \in D;$

- b) $4x = 5x - 7 = 12x - 2, x \in D; 8x + 11x + 2, x \in D; 9x = 73; 4x < 83, x \in D;$
 c) $8x = 2x + 3 = 9x - 5, x \in D; 6x + 19x + 1, x \in D; 2x = 19; 3x < 13, x \in D;$
 d) $-3x = 9x - 8 = 75x - 6, x \in D; 9x + 45x + 31, x \in D; 7x = 23; 24x < 5, x \in D.$
3. Enumerați fiecare membru al ecuației:
- a) $4x - 5 = 6x + 12, x \in D;$ b) $12x - 3 = 35x + 29, x \in D;$
 c) $14x - 45 = 27x - 2x, x \in D;$ d) $18x + 23 = 35x + 12, x \in D.$
4. Precizați câte necunoscute are fiecare dintre ecuațiile:
- a) $2,4x + 7 = 33x - 4, x \in D;$ b) $6,3x - 0,4y = 15x + 2, x \in D, y \in E;$
 c) $6x^2 - 5z = 12, x \in D, z \in E;$ d) $6x - 2,7y = 3,2x + 4, x \in D, y \in E.$
5. Selectați ecuațiile care au coeficienți raționali:
- a) $2,8x - 2,5 = \sqrt{7} - 2, x \in D;$ b) $\sqrt{1\,024}x - 15 = 3x - 10, x \in D;$
 c) $5,(7)x - \sqrt{17} = 13,8, x \in D;$ d) $\sqrt{65,61}x - 7,(2) = 13x - 12, x \in D.$
6. Stabiliți care dintre ecuațiile următoare au soluții în mulțimea $\{-2, -1, 2, 3, 4\}$:
- a) $5x - 7 = 8, x \in \mathbb{R};$ b) $9x - 7 = 11, x \in \mathbb{R};$ c) $6x - 5 = 13, x \in \mathbb{R};$ d) $9x - 20 = 16, x \in \mathbb{R}.$
7. Controlați dacă:
- a) $2\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - 8 = 0, x \in \mathbb{R};$ b) $2\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $x^2 - 12 = 0, x \in \mathbb{R};$
 c) $2\sqrt{5}$ este soluție a ecuației $x^2 - 20 = 0, x \in \mathbb{R};$ d) $5\sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - 50 = 0, x \in \mathbb{R}.$
8. Aplicând proprietățile egalității numerelor reale, construiți trei ecuații echivalente cu ecuația:
- a) $7x - 3 = 8, x \in \mathbb{R};$ b) $10x - 8 = 11, x \in \mathbb{R};$ c) $11x - 9 = 13, x \in \mathbb{R};$ d) $18x - 5 = 20, x \in \mathbb{R}.$
9. Controlați echivalența ecuațiilor:
- a) $5x - 12 = x - 8, x \in \mathbb{R},$ și $2x - 8 = 0, x \in \mathbb{R};$ b) $9x - 17 = x - 7, x \in \mathbb{R},$ și $18x - 6 = 0, x \in \mathbb{R};$
 c) $7x - 18 = 2x - 3, x \in \mathbb{R},$ și $4x - 12 = 0, x \in \mathbb{R};$ d) $23x - 12 = 5x - 6, x \in \mathbb{R},$ și $6x - 6 = 0, x \in \mathbb{R}.$
10. Model. $x = 3\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 - 18 = 0.$ Procedând ca în model, aflați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția: a) $5\sqrt{2};$ b) $3\sqrt{7};$ c) $5\sqrt{5};$ d) $11\sqrt{3}.$
11. Model. $x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0.$ Procedând ca în model, aflați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $12 + \sqrt{15};$ b) $13 + \sqrt{14};$ c) $14 + \sqrt{17};$ d) $15 + \sqrt{19}.$
12. Aflați și comparați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $3 + 2\sqrt{15}$ cu cea care are soluția $3 - 2\sqrt{15};$ b) $2 + 4\sqrt{11}$ cu cea care are soluția $2 - 4\sqrt{11};$
 c) $5 + 3\sqrt{17}$ cu cea care are soluția $5 - 3\sqrt{17};$ d) $6 + 5\sqrt{19}$ cu cea care are soluția $6 - 5\sqrt{19}.$
13. Model. $x = \sqrt{5} + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 7 + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow x^2 + 7 = 2\sqrt{10} \Rightarrow x^4 + 14x^2 + 49 = 40 \Leftrightarrow x^4 + 14x^2 + 89 = 0.$ Procedând ca în model, aflați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $\sqrt{11} + \sqrt{13};$ b) $\sqrt{13} + \sqrt{15};$ c) $\sqrt{14} + \sqrt{19};$ d) $\sqrt{11} + \sqrt{19};$ e) $\sqrt{13} + \sqrt{17}.$
14. Model. $x = \sqrt{2} + 3\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 47 + 6\sqrt{10} \Leftrightarrow x^2 - 47 = 6\sqrt{10} \Rightarrow x^4 + 94x^2 + 2\,209 = 360 \Leftrightarrow x^4 + 94x^2 + 1849 = 0.$ Procedând ca în model, aflați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{3};$ b) $\sqrt{2} + 5\sqrt{5};$ c) $\sqrt{7} + 4\sqrt{3};$ d) $\sqrt{5} + 6\sqrt{2};$ e) $\sqrt{7} + 5\sqrt{3}.$
15. Aflați și comparați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{11}$ cu cea care are soluția $\sqrt{2} - 3\sqrt{11};$ b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{14}$ cu cea care are soluția $\sqrt{3} - 2\sqrt{14};$
 c) $\sqrt{5} + 2\sqrt{17}$ cu cea care are soluția $\sqrt{5} - 2\sqrt{17};$ d) $\sqrt{7} + 3\sqrt{13}$ cu cea care are soluția $\sqrt{7} - 3\sqrt{13}.$
16. Aflați și comparați ecuația cu coeficienți raționali, de grad minim, care are soluția:
- a) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ cu cea care are soluția $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2};$ b) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ cu cea care are soluția $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5};$
 c) $3\sqrt{7} + 7\sqrt{3}$ cu cea care are soluția $3\sqrt{7} - 7\sqrt{3};$ d) $6\sqrt{7} + 7\sqrt{6}$ cu cea care are soluția $6\sqrt{7} - 7\sqrt{6}.$

2. Ecuația de gradul II

Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuațiilor de gradul II

- 1) $5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -0,8$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-0,8; 0\}$.
- 2) $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow |2x| = 3 \Leftrightarrow |x| = 1,5$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-1,5; 1,5\}$.
- 3) $7x^2 + 11 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = -11$. Mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.
- 4) $5x^2 + 4x - 1 = 0$ are $\Delta = b^2 - 4ac = 36 > 0$. $x_1 = \frac{-4-6}{10} = -5$, $x_2 = \frac{-4+6}{10} = 0,2$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-5; 0,2\}$.
- 5) $2x^2 + 2x + 3 = 0$ are $\Delta = b^2 - 4ac = -20 < 0$. Ecuația nu are soluții reale, Mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.
Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu necunoscuta x și $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}^*$ are **discriminantul** $\Delta = b^2 - 4ac$.
Ecuația **are soluții reale dacă și numai dacă** $\Delta \geq 0$. Dacă:

$$1) \Delta < 0, \text{ atunci } S = \emptyset. \quad 2) \Delta = 0, \text{ atunci } S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}.$$

$$3) \Delta > 0, \text{ atunci } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

Ecuația $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ cu necunoscuta x și $a \in \mathbb{R}^*$, $b_1 \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}^*$ are **discriminantul** $\Delta_1 = (b_1)^2 - ac$.
Ecuația **are soluții reale dacă și numai dacă** $\Delta_1 \geq 0$.

$$\text{Dacă } \Delta_1 > 0, \text{ atunci } x_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta_1}}{a} \text{ și } x_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta_1}}{a}, S = \left\{ \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta_1}}{a}, \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta_1}}{a} \right\}.$$

Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuațiilor de gradul II sau rezolvabile cu ajutorul acestor ecuații

■ Exerciții rezolvate

- 1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ are $\Delta_1 = (b_1)^2 - ac = 4 > 0$. $x_1 = -1 - 2 = -3$, $x_2 = -1 + 2 = 1$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-3, 1\}$.
- 2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ se rezolvă cu ajutorul ecuației $y^2 - 13y + 36 = 0$ cu $y = x^2$. Ecuația în y are soluțiile 4 și 9. $x^2 = 4$ are soluțiile -2 și 2 , iar $x^2 = 9$ are soluțiile -3 și 3 . Prin urmare, ecuația inițială are mulțimea soluțiilor este $S = \{-3, -2, 2, 3\}$.
- 3) $\frac{4x}{x+3} - \frac{5}{x-3} = 1$, (1). DVA = $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, (2). (1) $\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x - 5x - 15}{x^2 - 9} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 17x - 6}{x^2 - 9} = 0$.
Ecuația inițială are soluțiile ecuației $3x^2 - 17x - 6 = 0$ care se află în DVA. $3x^2 - 17x - 6 = 0$ are soluțiile $-0, (3)$ și 6 , ecuația inițială are mulțimea soluțiilor $S = \{-0, (3); 6\}$.
- 4) Suma și produsul soluțiilor reale ale ecuației $2x^2 + 7x - 3 = 0$ sunt respectiv, $-3,5$ și $-1,5$.
- 5) Pentru a afla numerele reale cu suma 32 și produsul 255 se rezolvă ecuația de forma $x^2 - Sx + P = 0$ cu $S = 32$ și $P = 255$.

Teorema lui Viète. (Relațiile între soluțiile și coeficienții ecuației de gradul II).

Dacă ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$ cu necunoscuta x și $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}^*$ are soluțiile reale x_1 și x_2 ($\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$), atunci $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

- 6) Fie ecuația $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Fără să rezolvați ecuația, calculați: $S^{(2)} = x_1^2 + x_2^2$ și $S^{(3)} = x_1^3 + x_2^3$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației.
Rezolvare. $S^{(2)} = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$, unde $S = -1,5$ și $P = 2,5$. $S^{(2)} = 2,25 - 5 = -2,25$. $S^{(3)} = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$. Rezultă $S^{(3)} = (-1,5)^3 - 3 \cdot 2,25 \cdot (-1,5) = -3,375 + 10,125 = 6,75$.

■ **Exerciții**

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $8x^2 + 3x = 0$; b) $7x^2 - 3x = 0$; c) $-9x^2 + 11x = 0$; d) $-11x^2 - 14x = 0$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $9x^2 - 625 = 0$; b) $25x^2 - 16 = 0$; c) $25x^2 - 36 = 0$; d) $100x^2 - 324 = 0$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $56x^2 + 4 = 0$; b) $16x^2 + 9 = 0$; c) $25x^2 + 121 = 0$; d) $100x^2 + 576 = 0$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$; b) $25x^2 - 30x + 9 = 0$; c) $4x^2 - 28x + 49 = 0$; d) $64x^2 - 48x + 9 = 0$.
5. Fie ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 a) Discriminantul ecuației este ... b) Ecuația are soluții reale dacă și numai dacă ...
 c) Dacă $\Delta = 0$, atunci $S = \dots$ d) Dacă $\Delta > 0$, atunci $x_1 = \dots$ $S = \dots$
6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $x^2 + 5x + 11 = 0$; b) $x^2 + 6x + 10 = 0$; c) $2x^2 + 3x + 3 = 0$; d) $5x^2 + 7x + 4 = 0$.
7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $x^2 + 8x + 5 = 0$; b) $3x^2 + 2x - 4 = 0$; c) $2x^2 + 6x - 1 = 0$; d) $5x^2 + 4x - 2 = 0$.
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $4x^2 + 8x + 7 = 0$; b) $6x^2 + 10x + 9 = 0$; c) $3x^2 + 2x + 3 = 0$; d) $5x^2 + 4x + 2 = 0$.
9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 a) $x^2 + 34x + 123 = 5x + 23$; b) $x^2 - 12x + 87 = 5x + 15$; c) $x^2 - 11x + 72 = 4x + 18$.
10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 a) $5x^2 - 41x + 17 = 2x^2 - 14x + 7$; b) $6x^2 - 14x + 5 = 2x^2 - 5x + 3$; c) $7x^2 + 5x - 23 = 4x^2 + 4x - 13$;
 d) $11x^2 - 18x - 16 = 6x^2 + 15x - 2$; e) $9x^2 + 23x + 17 = 4x^2 + 46x + 3$; f) $x^2 + 26x + 61 = 5x - 19$.
11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 a) $8x^2 + 6x + 7 = 5x^2 - 9x + 5$; b) $3x^2 + 21x + 3 = 6x^2 + 12x + 5$; c) $11x^2 + 15x - 33 = 8x^2 + 16x - 18$.
12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 a) $5x^2 - 5x + 8 = 2x^2 + 2x + 4$; b) $13x^2 - 9x + 2 = 5x^2 - 6x + 1$; c) $x^2 + 26x + 61 = 5x - 19$.
13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $(3x^2 - 2)^2 = (x^2 + 3)^2$; b) $(4x^2 - 3)^2 = (2x^2 + 1)^2$.
14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $5x^2 - 2x + 8 = (2x + 3)^2$; b) $2x^2 - 11x - 16 = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$.
15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
 a) $\frac{x+1}{3x} = \frac{x-2}{x+5}$; b) $\frac{x+4}{5x} = \frac{x-7}{x-6}$; c) $\frac{x+8}{4x} = \frac{x-2}{x+3}$; d) $\frac{x-5}{6x} = \frac{x-6}{x-4}$.
16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$; b) $x^4 - 10x^2 + 21 = 0$; c) $x^4 - 12x^2 + 35 = 0$; d) $x^4 - 11x^2 + 24 = 0$.
17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$; b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$; c) $x^4 - 18x^2 + 32 = 0$; d) $x^4 - 18x^2 + 77 = 0$.
18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 a) $\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = 1$; b) $\frac{5}{3x-2} + \frac{3}{3x+2} = 1$; c) $\frac{2}{4x-3} - \frac{5}{4x+3} = 1$; d) $\frac{3}{5x-2} - \frac{4}{5x+2} = 1$.
19. Fără să rezolvați ecuația, aflați suma și produsul soluțiilor reale:
 a) $3x^2 - 11x - 8 = 0$; b) $5x^2 - 7x - 12 = 0$; c) $4x^2 - 5x + 1 = 0$; d) $2x^2 - 9x - 8 = 0$.
20. Aflați două numere reale dacă:
 a) suma lor este -20 , iar produsul lor este 91 ; b) suma lor este -17 , iar produsul lor este -138 ;
 c) suma lor este -2 , iar produsul lor este -224 ; d) suma lor este 15 , iar produsul lor este -126 .
21. Fără să rezolvați ecuația $8x^2 - 3x - 5 = 0$, calculați: $S^{(2)} = x_1^2 + x_2^2$ și $S^{(3)} = x_1^3 + x_2^3$.

3. Ecuații raționale

Exemple.

- 1) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x + 5$. $4x + 5 = 0, x \in \mathbb{R}$, este ecuația de gradul I atașată funcției f .
- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x^2 - 6x + 2$. $5x^2 - 6x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$, este ecuația de gradul II atașată funcției f .
- 3) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$. $2x^3 + 7x^2 - 3x + 12 = 0, x \in \mathbb{R}$, este ecuația de gradul III atașată funcției f .

Rezolvarea ecuației de gradul I de forma $ax + b = 0, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = -b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow ax : a = -b : a \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}; S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Ecuația atașată funcției afine definite de formula $f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, este **ecuația afină** $ax + b = 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

- 1) Dacă $a \neq 0$, ecuația afină este ecuație de gradul I:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = -b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow ax : a = -b : a \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}; S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

- 2) Dacă $a = 0$, ecuația afină se reduce la $b = 0, x \in \mathbb{R}$. Rezultă:

- Dacă $b = 0$, atunci ecuația devine $0 = 0, x \in \mathbb{R}$, cu $S = \mathbb{R}$.
- Dacă $b \neq 0$, atunci ecuația nu are soluții $S = \emptyset$.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $4x + 7 = 0$.
 $4x + 7 = 0 \Leftrightarrow 4x + 7 - 7 = -7 \Leftrightarrow 4x = -7 \Leftrightarrow 4x : 4 = -7 : 4 \Leftrightarrow x = -1,75$. Rezultă $S = \{-1,75\}$.
- 2) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația $3x - 8 = 7x + 19$.
 $3x - 8 = 7x + 19 \Leftrightarrow 3x - 8 - 3x = 7x + 19 - 3x \Leftrightarrow 4x + 19 = -8 \Leftrightarrow 4x + 19 - 19 = -8 - 19 \Leftrightarrow 4x = -27 \Leftrightarrow x = -6,75; S = \{-6,75\}$.
- 3) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: $(2x - 1)(2x + 1) = 2x(2x - 3)$.
 $(2x - 1)(2x + 1) = 2x(2x - 3) \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 4x^2 - 6x \Leftrightarrow 4x^2 - 1 - 4x^2 = 4x^2 - 6x - 4x^2 \Leftrightarrow -1 = -6x \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = 0,1(6)$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{0,1(6)\}$.
- 4) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: $\frac{5}{x} = \frac{3}{x-2}$.
DVA = $\mathbb{Q} \setminus \{0, 2\}$, (1). $5(x-2) = 3x \Leftrightarrow 5x - 10 = 3x \Leftrightarrow 5x - 10 + 10 = 3x + 10 \Leftrightarrow 5x = 3x + 10 \Leftrightarrow 5x - 3x = 3x - 3x + 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$, (2). (1) și (2) implică: mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{5\}$.
- 5) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: $\frac{4}{x-3} = \frac{3}{x+5}$.
DVA = $\mathbb{Q} \setminus \{-5, 3\}$, (1). $4(x+5) = 3(x-3) \Leftrightarrow 4x + 20 = 3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 20 - 20 = 3x - 9 - 20 \Leftrightarrow 4x = 3x - 29 \Leftrightarrow 4x - 3x = 3x - 3x - 29 \Leftrightarrow x = -29$, (2). (1) și (2) implică: mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-29\}$.
- 6) Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: $\frac{x-4}{x-5} = \frac{x+5}{x+2}$.
DVA = $\mathbb{Q} \setminus \{-2, 5\}$, (1). $(x-4)(x+2) = (x-5)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = x^2 - 25 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 + 8 = x^2 - 25 + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x = x^2 - 17 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 2x = x^2 - 17 - x^2 \Leftrightarrow -2x = -17 \Leftrightarrow x = 8,5$, (2). (1) și (2) implică: mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{8,5\}$.
- 7) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(m+3)x - 7 = 0$.
 $(m+3)x - 7 = 0 \Leftrightarrow (m+3)x = 7$, (1). Dacă $m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$, (2). (1) și (2) implică $x = \frac{7}{m+3}$
mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \left\{ \frac{7}{m+3} \right\}$. Dacă $m+3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$, (3). (1) și (3) implică mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \emptyset$.

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: a) $2x + 1 = 0$; b) $4x + 3 = 0$; c) $5x + 2 = 0$; d) $7x + 4 = 0$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = 0$; b) $\frac{5}{7}x + \frac{2}{3} = 0$; c) $\frac{5}{6}x + \frac{2}{7} = 0$; d) $\frac{7}{8}x + \frac{2}{5} = 0$.
3. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația: a) $4x - 1 = -23$; b) $7x - 3 = 9$; c) $6x - 5 = 10$; d) $7x + 8 = -2$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $3x - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$; b) $7x - 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; c) $6x - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$; d) $10x + 6\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.
5. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $5z + 2 = 3z - 7$; b) $7z + 8 = 5z - 10$; c) $12z + 17 = 19z - 23$; d) $13z + 8 = 18z - 92$.
6. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $3(t + 4) = 12t - 9$; b) $6(t + 5) = 19t - 130$; c) $23(t + 12) = 19t - 120$; d) $35(t + 42) = 15t - 39$.
7. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $2(5z - 4) = 7(2z - 3)$; b) $8(3z - 2) = 3(9z - 4)$; c) $10(7z - 2) = 11(3z - 5)$; d) $13(5z - 6) = 8(5z - 3)$.
8. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{2}{15}x - 2 = \frac{3}{4}x - 3$; b) $\frac{3}{16}x - 4 = \frac{5}{6}x - 8$; c) $\frac{3}{10}x - 5 = \frac{4}{15}x - 12$; d) $\frac{5}{18}x - 6 = \frac{7}{12}x - 11$.
9. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{8x}{23} = \frac{12 - 8x}{14}$; b) $\frac{6x}{7} = \frac{3 - 6x}{8}$; c) $\frac{5x}{16} = \frac{3 - 5x}{15}$; d) $\frac{3x}{17} = \frac{6 - 3x}{11}$.
10. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{x}{2} - \frac{4}{5} = \frac{5x}{4} - \frac{1}{12}$; b) $\frac{x}{3} - \frac{2}{7} = \frac{4x}{8} - \frac{3}{16}$; c) $\frac{x}{8} - \frac{5}{6} = \frac{3x}{10} - \frac{7}{12}$; d) $\frac{x}{9} - \frac{4}{15} = \frac{4x}{14} - \frac{5}{21}$.
11. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $(2x - 1)^2 + (5x - 1)^2 = (2x + 3)^2 + (5x + 2)^2$; b) $(3x - 1)^2 + (4x - 1)^2 = (5x + 4)^2$;
c) $(5x - 1)^2 + (12x - 1)^2 = (13x + 2)^2$; d) $(8x - 3)^2 + (15x + 1)^2 = (17x + 2)^2$.
12. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $|2x + 1| + |y - 4,5| + |z - 3,6| = 0$; b) $|5x + 2| + |y - 2,8| + |z - 4,1| = 0$;
c) $|6x + 1| + |y - 1,9| + |z - 5,2| = 0$; d) $|12x + 1| + |y - 5,9| + |z - 2,1| = 0$.
13. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x - 3}$; b) $\frac{9}{x} = \frac{4}{x - 5}$; c) $\frac{2}{x} = \frac{7}{x - 4}$; d) $\frac{7}{x} = \frac{8}{x - 5}$; e) $\frac{4}{x} = \frac{11}{x - 6}$.
14. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{6}{x - 2} = \frac{5}{x + 4}$; b) $\frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x + 2}$; c) $\frac{7}{x - 1} = \frac{8}{x + 5}$; d) $\frac{4}{x - 8} = \frac{7}{x + 6}$; e) $\frac{2}{x - 9} = \frac{9}{x + 7}$.
15. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x + 4}{x + 3}$; b) $\frac{x - 2}{x - 5} = \frac{x + 8}{x + 7}$; c) $\frac{x - 3}{x - 6} = \frac{x + 8}{x + 2}$; d) $\frac{x - 7}{x - 9} = \frac{x + 2}{x + 6}$; e) $\frac{x - 3}{x - 9} = \frac{x + 2}{x + 6}$.
16. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:
a) $\frac{x - 3}{x - 7} = \frac{x + 7}{x + 2}$; b) $\frac{x - 1}{x - 8} = \frac{x + 8}{x + 6}$; c) $\frac{x - 7}{x - 2} = \frac{x + 2}{x + 3}$; d) $\frac{x - 8}{x - 5} = \frac{x + 5}{x + 4}$; e) $\frac{x - 4}{x - 9} = \frac{x + 9}{x + 7}$.
17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(m + 4)x - 11 = 0$; b) $(m + 12)x - 15 = 0$; c) $(m - 16)x - 21 = 0$; d) $(m - 128)x - 38 = 0$.

4. Sisteme de ecuații

■ Exercițiu rezolvat

Suma de 275 lei este plătită folosind 38 de bancnote unele de 5 lei, celelalte de 10 lei. Pentru a afla câte bancnote de 5 lei și câte bancnote de 10 lei se folosesc trebuie rezolvat sistemul având necunoscutele x = numărul bancnotelor de 5 lei, y = numărul bancnotelor de 10 lei: $\begin{cases} x + y = 38 \\ 5x + 10y = 275 \end{cases}$. Împărțind a doua ecuație la 5 se obține: $\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 38 \\ y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 17 \end{cases}$. 21 bancnote de 5 lei și 17 bancnote de 10 lei.

Propoziția compusă $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ și $g_1(x, y) = g_2(x, y)$ cu variabilele x și y , notată

$$\begin{cases} f_1(x, y) = f_2(x, y) \\ g_1(x, y) = g_2(x, y) \end{cases} \text{ este un } \textbf{sistem de ecuații cu două necunoscute}.$$

Perechea ordonată (x_0, y_0) este **soluție a sistemului**, dacă este soluție a fiecărei ecuații a sistemului.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \\ 3x + 4y = 63 \end{cases}$ (1)
 $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{3x + 5y}{6 + 25} = \frac{63}{31} = 3$, (2). Conform (2), (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 3 \\ \frac{y}{5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 15 \end{cases}$. $S = \{(6, 15)\}$.
- 2) Pentru a rezolva în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 14 \end{cases}$ se operează substituțiile $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ și rezultă:
 $\begin{cases} 3u - v = 4 \\ 4u + 3v = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u - 3v = 12 \\ 4u + 3v = 14 \end{cases}$ Prima ecuație înmulțită cu 3. $\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v = 4 \\ 13u = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v = 4 \\ u = 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 0,5 \end{cases}$. $S = \{(0,5; 0,5)\}$.
- 3) Rezolvarea în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ a sistemului $\begin{cases} \frac{3x + 2y}{xy} = \frac{13}{5} \\ \frac{5x - 3y}{xy} = -2 \end{cases}$ Sistemul este echivalent cu:
 $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{13}{5} \\ -\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = -2 \end{cases}$ (*). Sistemul (*) se rezolvă ca exercițiul anterior. $\frac{1}{x} = u$ și $\frac{1}{y} = v$.
 $\begin{cases} 2u + 3v = \frac{13}{5} \\ -3u + 5v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u + 9v = \frac{39}{5} \\ -6u + 10v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19v = \frac{19}{5} \\ -3u + 5v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{5} \\ u = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$. $S = \{(1, 5)\}$.
- 4) Rezolvarea în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a sistemului $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + 4y = 5 \end{cases}$
 $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 - x \\ x^2 + 2(3 - x) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 - x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. $S = \{(1, 1)\}$.
- 5) Rezolvarea în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a sistemului $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$. Soluțiile sistemului se află rezolvând ecuația cu suma soluțiilor 2 și produsul lor -8 , $z^2 - 2z - 8 = 0$. Ecuația are soluțiile -2 și 4 . Soluțiile sistemului sunt $(-2, 4)$ și $(4, -2)$.

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + 4y = 22 \\ 3x - 5y = -19; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 6y = -9 \\ 4x - 3y = -18; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 8y = -20 \\ 3x - 6y = -12; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + 5y = -5 \\ 4x - 9y = 38. \end{cases} \end{array}$$

2. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \\ 2x + 5y = 205; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{9} \\ 3x + 4y = 144; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{10} \\ 4x + 7y = 196; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{11} \\ 3x + 4y = 186. \end{cases} \end{array}$$

3. Copiați și finalizați rezolvarea.

$$\text{a)} \begin{cases} 3x - 5y = 60 \\ 2x + 11y = 171, \end{cases} \quad (1). \quad 3x - 5y = 60 \Leftrightarrow 3x = 5y + 60 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{5y + 60}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y + 12}{3} = \frac{2x + 11y + 12}{10 + 33} = \frac{215}{43} = 5, (2). \text{ Conform (2), (1) } \Leftrightarrow$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x - 7y = 42 \\ 3x + 8y = 142, \end{cases} \quad (1). \quad 2x - 7y = 42 \Leftrightarrow 2x = 7y + 42 \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{7y + 42}{14} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y + 6}{2} = \frac{3x + 8y + 6}{21 + 16} = \frac{148}{37} = 4, (2). \text{ Conform (2), (1) } \Leftrightarrow$$

$$\text{c)} \begin{cases} 8x - 9y = 144 \\ 3x + 8y = 257, \end{cases} \quad (1). \quad 8x - 9y = 72 \Leftrightarrow 8x = 9y + 72 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{9y + 144}{72} \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{y + 16}{8} = \frac{3x + 8y + 16}{27 + 64} = \frac{273}{91} = 3, (2). \text{ Conform (2), (1) } \Leftrightarrow$$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = -17 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 35; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = -6 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 21; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{7}{x} - \frac{3}{y} = -48 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = -6; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{8}{x} - \frac{3}{y} = 61 \\ \frac{7}{x} + \frac{2}{y} = 21. \end{cases} \end{array}$$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{5x + 4y}{xy} = 43 \\ \frac{7x - 3y}{xy} = 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{4x - 9y}{xy} = 2 \\ \frac{3x - 8y}{xy} = -1; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{6x - 7y}{xy} = -7 \\ \frac{2x - 5y}{xy} = 5; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{3x - 8y}{xy} = 48 \\ \frac{4x - 7y}{xy} = 53. \end{cases} \end{array}$$

6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + 3y = -14 \\ x^2 + 6x = -9; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 5y = -23 \\ x^2 + 14x = -49; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 6y = -35 \\ x^2 - 18x = -81; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + 2y = 48 \\ x^2 - 12x = -36. \end{cases} \end{array}$$

7. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = -45; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y = 9 \\ xy = -52; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = -84; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = -78. \end{cases} \end{array}$$

8. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{15} \\ xy = -15; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{11}{60} \\ xy = -60; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ xy = 6; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{13}{40} \\ xy = 40. \end{cases} \end{array}$$

9. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + xy + y = 29 \\ xy = 20; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + xy + y = 31 \\ xy = 21; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + xy + y = 35 \\ xy = 24; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + xy + y = 45 \\ xy = 35. \end{cases} \end{array}$$

5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații

■ Exerciții rezolvate

- 1) Un autobuz a parcurs distanța de 100 km dintre orașele A și B cu viteza de 40 km/h. La întoarcere autobuzul a parcurs distanța dintre cele două orașe cu viteza de 50 km/h. Aflați cu ce viteză medie a parcurs toată deplasarea autobuzul.

Rezolvare. Viteza medie este raportul dintre distanța parcursă și timpul în care este parcursă acea distanță.

Timpul în ore este $\frac{100}{40} + \frac{100}{50} = 4,5$. Rezultă că viteza medie este $v = (200 : 4,5) \text{ km/h} = 44,4(4) \text{ km/h}$.

- 2) Două automobile au pornit din același loc în același moment în sensuri opuse. După 3 ore distanța dintre cele două automobile a fost de 345 km. Aflați vitezele celor două automobile, dacă viteza unuia a fost cu 15 km/h mai mare decât a celuilalt.

Rezolvare. Viteza în km/h a unui automobil este x , iar a celuilalt $x + 15$.

Distanța dintre cele două automobile este egală cu produsul dintre suma vitezelor și timpul în care a fost parcursă acea distanță.

$$3(x + x + 15) = 345 \Leftrightarrow 3(2x + 15) = 345 \Leftrightarrow 2x + 15 = 115 \Leftrightarrow 2x = 100 \Leftrightarrow x = 50.$$

Viteza unui automobil a fost de 50 km/h, iar a celuilalt de 65 km/h.

- 3) Un vapor parcurge distanța dintre două porturi în 3 ore în aval și în 4 ore în amonte. Aflați distanța dintre porturi, dacă viteza apei este de 2 km/h.

Rezolvare. Fie x distanța dintre porturi în kilometri. Viteza de deplasare în aval este: viteza vaporului + viteza apei. Viteza de deplasare în amonte este: viteza vaporului – viteza apei. În ambele situații viteza vaporului este aceeași. Rezultă: $\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{5} + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 2 + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4 \Leftrightarrow 2x = 60 \Leftrightarrow x = 30$.

Distanța dintre cele două porturi este 30 km.

- 4) Mărind cu același număr natural numărătorul și numitorul fracției $\frac{2}{5}$, se obține $\frac{7}{8}$. Aflați numărul.

Rezolvare. Fie x numărul căutat. Atunci: $\frac{2+x}{5+x} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 8(2+x) = 7(5+x) \Leftrightarrow 16 + 8x = 35 + 7x \Leftrightarrow x = 19$. Numărul căutat este 19.

- 5) Dacă adunăm, pe rând, unui număr 13, 15, 29, obținem trei numere a căror sumă este cu 5 mai mare decât numărul dat. Aflați numărul.

Rezolvare. Fie x numărul căutat. Atunci: $x + 13 + x + 15 + x + 29 = x + 5 \Leftrightarrow 3x + 57 = x + 5 \Leftrightarrow 2x = -52 \Leftrightarrow x = -26$. Numărul căutat este -26.

- 6) Un ogar urmărește o vulpe. Aflați peste câte sărituri ogarul ajunge vulpea, dacă ea se află la 60 sărituri (de vulpe) înaintea ogarului, iar în timp ce vulpea face 9 sărituri ogarul face 6 sărituri și în 3 sărituri ogarul parcurge aceeași distanță cât și vulpea în 7 sărituri.

Rezolvare. Fie x – lungimea saltului ogarului, y – lungimea saltului vulpii. Conform datelor:

$3x = 7y$, (1); în timp ce ogarul parcurge distanța de $6x$, vulpea parcurge $9y$, (2).

(1) și (2) implică: după ce ogarul parcurge $6x = 14y$, distanța dintre ei se micșorează cu $5y$. Inițial distanța dintre ei este $60y$. Deoarece $60 : 5 = 12$, ogarul va ajunge vulpea după ce va parcurge distanța de $12 \cdot 6x$ sau după ce acesta va face 72 de salturi.

- 7) Un bazin poate fi umplut prin trei robinete. Primele două robinete pot umple bazinul în 0,8(3) ore; al doilea și al treilea robinet pot umple bazinul în 0,5 ore; primul și al treilea robinet pot umple bazinul în 0,(6) ore. Aflați în câte ore poate umple bazinul fiecare robinet.

Rezolvare. Primul robinet poate umple bazinul în x ore, al doilea în y ore, al treilea în z ore.

Conform datelor problemei, se obține sistemul
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
 Se operează substituțiile: $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{z}$.

și se obține:
$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{6} \\ v + t = \frac{1}{2} \\ u + t = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + t = 1 \\ v + t = \frac{1}{2} \\ u + t = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0,5 \\ v = 0,(3) \\ t = 0,1(6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 6. \end{cases}$$

Răspuns: Primul robinet umple bazinul în 2 ore, al doilea – în 3 ore, al treilea – în 6 ore.

- 8) Ipotezuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm și înălțimea triunghiului din vârful unghiului drept are $\frac{60}{13}$ cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.

Rezolvare. Fie x și y lungimile catetelor triunghiului. Atunci, conform teoremei lui Pitagora, $x^2 + y^2 = 169$. Înălțimea triunghiului dreptunghic din vârful unghiului drept este raportul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei, $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Lungimile catetelor se află rezolvând în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemului
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ xy = 60. \end{cases}$$

$S = x + y$ și $P = xy$ conduce la sistemul
$$\begin{cases} P = 60 \\ S^2 - 2P = 169. \end{cases}$$
 Soluțiile sistemului inițial se află rezolvând ecuația $z^2 - Sz + P = 0$. **Răspuns:** Lungimile catetelor sunt 5 cm și 12 cm.

- 9) O soluție de apă cu sare are concentrația de sare 5%. Aflați ce cantitate de apă trebuie adăugată la 5 kg de soluție pentru a obține o soluție cu concentrația de sare 2%. Se consideră că 1 litru de apă cântărește 1 kg.

Rezolvare. În 5 kg de soluție cu concentrația de 5% se află $0,05 \cdot 5 \text{ kg} = 0,25 \text{ kg}$ de sare. Fie x cantitatea de apă care se adaugă pentru a se obține o soluție cu concentrația de 2%. În această soluție 0,25 kg de sare constituie 2% din cantitatea de soluție. $0,25 : 2\% = 0,25 : 0,02 = 0,25 \cdot 50 = 12,5$. Masa soluției este 12,5 kg. $12,5 - 5 = 7,5$. Cantitatea de apă care trebuie adăugată are masa de 7,5 kg. **Răspuns:** 7,5 litri de apă.

- 10) O brigadă are de prășit două loturi, al doilea fiind de 2 ori mai mic decât primul. După ce prima zi toată brigada prășește primul lot, a doua zi o jumătate din efectivul brigăzii termină de prășit primul lot, iar a doua jumătate prășește lotul al doilea, pe care 2 oameni îl termină lucrând toată ziua a treia. Din câte persoane este formată brigada?

Rezolvare. A doua zi, jumătate din brigadă a terminat primul lot. Deci o jumătate din efectivul brigăzii prășește o treime din primul lot, iar cealaltă jumătate din efectiv prășește aceeași suprafață din al doilea lot (două treimi din acesta). Deoarece 2 oameni prășesc în a treia zi o suprafață egală cu $\frac{1}{3}$ din al doilea lot = $\frac{1}{6}$ din primul lot. Deoarece $\frac{1}{3}$ din primul lot este prășită într-o zi de 4 oameni (jumătate din efectivul brigăzii), toată brigada este formată din 8 oameni.

- 11) Pe o pășune iarba crește permanent și cu aceeași viteză. Se știe că 18 vaci consumă această iarbă în 30 zile, iar 23 de vaci – în 20 zile. Câte vaci pot fi hrănite cu iarba de pe această pășune în 50 zile?

Rezolvare. O vacă consumă într-o zi o rație (1 r). 18 vaci consumă $540r$ în 30 zile. 23 de vaci consumă $460r$ în 20 zile. În $(30 - 20)$ zile = 10 zile cresc $(540 - 460)r = 80r$. Într-o zi cresc $8r$, iar în 20 zile cresc $160r$. Restul de $300r$ reprezintă numărul de rații pe care pășunea le oferea înainte de a introduce vacile. În 50 zile cresc $400r$ și în total pășunea oferă în acest timp $700r$. $700 : 50 = 14$. Cantitatea aceasta constituie hrana pentru 50 zile a 14 vaci. **Răspuns:** 14 vaci.

■ Exerciții

- Un autobuz a parcurs distanța $d = 120$ km dintre orașele A și B cu viteza $v_1 = 45$ km/h. La întoarcere autobuzul a parcurs distanța dintre cele două orașe cu viteza de $v_2 = 52$ km/h. Aflați cu ce viteză medie a parcurs toată deplasarea autobuzul.
Rezolvați aceeași problemă, dacă: a) $d = 90$ km, $v_1 = 36$ km/h, $v_2 = 42$ km/h;
b) $d = 110$ km, $v_1 = 48$ km/h, $v_2 = 56$ km/h; c) $d = 125$ km, $v_1 = 50$ km/h, $v_2 = 60$ km/h.
- Două automobile au pornit din același loc în același moment în sensuri opuse. După $t = 5$ ore distanța dintre cele două automobile a fost $d = 656$ km. Aflați vitezele celor două automobile, dacă viteza unuia a fost cu $a = 21$ km/h mai mare decât a celuilalt.
Rezolvați aceeași problemă, dacă: a) $t = 4$ ore, $d = 524$ km, $a = 14$ km;
b) $t = 3$ ore, $d = 646$ km, $a = 16$ km; c) $t = 6$ ore, $d = 763$ km, $a = 13$ km.
- Un vapor parcurge distanța dintre două porturi în $t_1 = 2$ ore în aval și în $t_2 = 3$ ore în amonte. Aflați distanța dintre porturi, dacă viteza apei este de $a = 2$ km/h.
Rezolvați aceeași problemă, dacă: a) $t_1 = 4$ ore, $t_2 = 5$ ore, $a = 3$ km/h;
b) $t_1 = 3$ ore, $t_2 = 5$ ore, $a = 4$ km/h; c) $t_1 = 2$ ore, $t_2 = 4$ ore, $a = 2$ km/h.
- Mărind cu același număr natural numărătorul și numitorul fracției $f = \frac{2}{7}$, se obține $g = \frac{5}{6}$. Aflați numărul.
Rezolvați aceeași problemă, dacă: a) $f = \frac{2}{9}$, $g = \frac{7}{8}$; b) $f = \frac{3}{10}$, $g = \frac{5}{6}$; c) $f = \frac{5}{12}$, $g = \frac{3}{4}$.
- Dacă adunăm, pe rând, unui număr 14, 21, 38, obținem trei numere a căror sumă este cu 7 mai mare decât numărul dat. Aflați numărul.
Rezolvați aceeași problemă, dacă se înlocuiesc datele respectiv cu:
a) 12, 36, 52, 8; b) 21, 39, 71, 9; c) 31, 58, 63, 23.
- Un tren trebuie să parcurgă o anumită distanță într-un interval de timp. Dacă s-ar deplasa cu viteza medie de 90 km/h, ar ajunge cu 2 h mai devreme, iar dacă s-ar deplasa cu viteza medie de 60 km/h, ar ajunge cu 1 h mai târziu decât timpul stabilit. Ce distanță trebuie să parcurgă trenul?
Aceeași cerință dacă datele problemei se schimbă, în ordine, cu:
a) 75 km/h, 2 h, 60 km/h, 1 h; b) 85 km/h, 2 h, 70 km/h, 1 h; c) 60 km/h, 2 h, 45 km/h, 1 h.
- Un gospodar are păsări și oi. În total sunt 86 de capete și 228 de picioare. Câte păsări și câte oi are gospodarul?
- Într-un bloc sunt 60 de apartamente: unele au 2 camere, celelalte au 3 camere. În total sunt 176 de camere. Câte apartamente au 2 camere și câte au 3 camere?
- Într-un bloc sunt 60 de apartamente: unele au 2 camere, celelalte au 3 camere. În total sunt 176 de camere. Câte apartamente au 2 camere și câte au 3 camere?
- Perimetrul unui dreptunghi este 26 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, dacă aria lui este 42 cm^2 .
- Perimetrul unui dreptunghi este 36 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, dacă aria lui este 45 cm^2 .
- Perimetrul unui dreptunghi este 30 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, dacă aria lui este 50 cm^2 .
- Perimetrul unui dreptunghi este 26 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, dacă aria lui este 30 cm^2 .
- Un ogar urmărește o vulpe. Aflați peste câte sărituri ogarul ajunge vulpea, dacă ea se află la 63 sărituri (de vulpe) înaintea ogarului, iar în timp ce vulpea face 7 sărituri, ogarul face 4 sărituri și în 2 sărituri ogarul parcurge aceeași distanță cât și vulpea în 5 sărituri.
- Un lup urmărește un iepure. Aflați peste câte sărituri lupul ajunge iepurele, dacă acesta se află la 56 sărituri (de iepure) înaintea lupului, iar în timp ce iepurele face 11 sărituri lupul face 8 sărituri și în 4 sărituri lupul parcurge aceeași distanță cât și iepurele în 9 sărituri.

16. Un ogar urmărește o vulpe. Aflați peste câte sărituri ogarul ajunge vulpea, dacă ea se află la 64 sărituri (de vulpe) înaintea ogarului, iar în timp ce vulpea face 12 sărituri ogarul face 10 sărituri și în 5 sărituri ogarul parcurge aceeași distanță cât și vulpea în 8 sărituri.
17. O vulpe urmărește un iepure. Aflați peste câte sărituri vulpea ajunge iepurele, dacă el se află la 60 sărituri (de iepure) înaintea vulpii, iar în timp ce iepurele face 18 sărituri vulpea face 16 sărituri și în 8 sărituri vulpea parcurge aceeași distanță cât și iepurele în 11 sărituri.
18. Un bazin poate fi umplut prin trei robinete. Primele două robinete pot umple bazinul în 1,2 ore; al doilea și al treilea robinet pot umple bazinul în 1,5 ore; primul și al treilea robinet pot umple bazinul în 2 ore. Aflați în câte ore poate umple bazinul fiecare robinet.
19. Un bazin poate fi umplut prin trei robinete. Primele două robinete pot umple bazinul în 120 minute; al doilea și al treilea robinet pot umple bazinul în 144 minute; primul și al treilea robinet pot umple bazinul în 240 minute. Aflați în câte timp poate umple bazinul fiecare robinet.
20. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 25 cm și înălțimea triunghiului din vârful unghiului drept are $\frac{168}{25}$ cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
21. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 37 cm și înălțimea triunghiului din vârful unghiului drept are $\frac{420}{37}$ cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
22. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 29 cm și înălțimea triunghiului din vârful unghiului drept are $\frac{420}{29}$ cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
23. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 41 cm și înălțimea triunghiului din vârful unghiului drept are $\frac{360}{41}$ cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
24. Mihai are de strâns o sumă de bani până la ziua mamei sale. Dacă va economisi 4 lei în fiecare zi, ar întârzia cu o zi, iar dacă va economisi câte 5 lei în fiecare zi, atunci ar avea banii cu o zi înaintea datei stabilite. De câți lei are nevoie Mihai și în câte zile trebuie să-i strângă?
25. a) O brigadă de tractoriști a avut de arat două loturi, al doilea fiind de două ori mai mic decât primul. În prima zi toată brigada a lucrat pe lotul cel mare. A doua zi o jumătate din brigadă a terminat, lucrând toată ziua, lotul cel mare, iar cealaltă jumătate a arat lotul cel mic, pe care 3 tractoriști l-au terminat de arat ziua următoare, lucrând toată ziua. Din câte persoane era formată brigada?
b) O echipă de muncitori are de zugrăvit două camere, una fiind $\frac{2}{3}$ din cealaltă. Prima zi toată echipa s-a ocupat de camera mare, pe care a terminat-o a doua zi o jumătate din echipă, lucrând toată ziua. A doua zi restul echipei s-a ocupat de camera a doua, pe care 5 muncitori au terminat-o ziua următoare lucrând toată ziua. Câți muncitori sunt în echipă?
26. a) Pe o pășune iarba crește permanent și cu aceeași viteză. Se știe că 20 de vaci consumă această iarba în 28 zile, iar 26 de vaci – în 20 zile. Câte vaci pot fi hrănite cu iarba de pe această pășune în 70 zile?
b) Pe o pășune iarba crește permanent și cu aceeași viteză. Se știe că 24 de vaci consumă această iarba în 30 zile, iar 28 de vaci – în 25 zile. Câte vaci pot fi hrănite cu iarba de pe această pășune în 50 zile?
c) Pe o pășune iarba crește permanent și cu aceeași viteză. Se știe că 20 de vaci consumă această iarba în 24 zile, iar 16 vaci – în 40 zile. Câte vaci pot fi hrănite cu iarba de pe această pășune în 60 zile?
d) Pe o pășune iarba crește permanent și cu aceeași viteză. Se știe că 24 de vaci consumă această iarba în 27 zile, iar 35 de vaci – în 16 zile. Câte vaci pot fi hrănite cu iarba de pe această pășune în 38 zile?

Sinteză

1. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ 5x + 2y = 69; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{7} \\ 3x + 5y = 84; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{7} \\ 4x + 3y = 65; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{2} \\ 7x + 3y = 69. \end{cases} \end{array}$$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 45 \\ \frac{9}{x} - \frac{2}{y} = 56; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = 31 \\ \frac{8}{x} - \frac{3}{y} = -11; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{8}{y} = -10 \\ \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = 33; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{7}{y} = -8 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 13. \end{cases} \end{array}$$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{7x-8y}{xy} = 59 \\ \frac{3x-4y}{xy} = 27; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{9x-5y}{xy} = 23 \\ \frac{8x-3y}{xy} = 19; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{7x-3y}{xy} = 5 \\ \frac{9x-4y}{xy} = 6; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{5x-2y}{xy} = 34 \\ \frac{6x-5y}{xy} = 59. \end{cases} \end{array}$$

4. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sistemele: a) $\begin{cases} x-4y=-32 \\ x^2-3y=-5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-5y=30 \\ x^2-6y=43. \end{cases}$

5. Rezolvați în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemele: a) $\begin{cases} |8x-3y|=27 \\ |4x+7y|=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |2x-9y|=15 \\ |5x+3y|=12. \end{cases}$

6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$\text{a)} \begin{cases} (2x-7y+6)(5x-6y+9)=0 \\ (4x-5y+3)(8x-3y+2)=0; \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} (9x-2y+11)(2x-3y+19)=0 \\ (7x-8y+1)(12x-5y+2)=0. \end{cases}$$

7. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele: a) $\begin{cases} x^2+5xy+y^2=-21 \\ x^2y^2=100; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=-11 \\ x^2y^2=144. \end{cases}$

8. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele: a) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{41}{400} \\ xy = -20; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{58}{441} \\ xy = -21. \end{cases}$

9. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemele: a) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{34}{15} \\ xy = 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\frac{13}{28} \\ xy = -28. \end{cases}$

10. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele: a) $\begin{cases} x+y=35 \\ y+z=19 \\ z+x=26; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=26 \\ y+z=-7 \\ z+x=13; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=17 \\ y+z=-9 \\ z+x=26. \end{cases}$

11. Aflați numerele reale care verifică:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} |5x-13y-32| + |10x-11y-16| = 0; & \text{b)} (9x-8y-5)^4 + (3x-12y-23)^8 = 0; \\ \text{c)} (2x-7y-12)^6 + (4x-9y-31)^{10} = 0; & \text{d)} (8x-5y-9)^4 + (4x-11y-13)^8 = 0. \end{array}$$

12. Aflați numerele reale care verifică:

$$\text{a)} \sqrt{3x-8y+17} + \sqrt{9x-4y+27} = 0; \quad \text{b)} \sqrt{2x-5y+13} + \sqrt{6x-7y+23} = 0.$$

13. Perimetrul unui dreptunghi este de 34 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, dacă suma ariilor pătratelor care au laturile respectiv congruente cu două laturi consecutive ale dreptunghiului este 169 cm².

14. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aflați a, b, c , dacă unul dintre zerourile lui f este 5, iar graficul lui f este o parabolă cu vârful în $(-3, 2)$.

Evaluare

I

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $|x^2 - 17x + 5| = 25$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - 5y = 23. \end{cases}$$
3. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x + y = 48 \\ xy = -100. \end{cases}$
4. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x - 8y = -25 \\ x^2 - 4y = -11. \end{cases}$
5. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -9 \\ \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 25. \end{cases}$$
6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} |3x - 6y| = 21 \\ 4x + 7y = -2. \end{cases}$$
7. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy = -21. \end{cases}$
8. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\frac{13}{6} \\ xy = -6. \end{cases}$$
9. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} |8x - 3y| = 23 \\ |4x + 7y| = 37. \end{cases}$$

II

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $|x^2 - 15x + 7| = 29$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x + 3y = -7 \\ 2x - 5y = 19. \end{cases}$$
3. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x + y = 47 \\ xy = -150. \end{cases}$
4. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x - 8y = 42 \\ x^2 - 4y = 20. \end{cases}$
5. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul:

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -34. \end{cases}$$
6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} |5x - 4y| = 38 \\ 3x + 5y = 29. \end{cases}$$
7. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12. \end{cases}$
8. Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ sistemul:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\frac{58}{21} \\ xy = -21. \end{cases}$$
9. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} |9x - 8y| = 43 \\ |3x + 11y| = 13. \end{cases}$$

Puncte	0-5	6-24	24-32	33-55	56-65	66-75	76-85	86-95	96-100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Din istoria matematicii. Marea teoremă a lui Fermat

În 1637 Fermat, în timp ce parcurgea o carte a matematicianului grec Diofant (epitaful de pe piatra lui funerară apare în multe cărți de matematică), a formulat o conjectură (o propoziție matematică, care nu este încă demonstrată este o conjectură): ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții întregi pentru $n > 2$.

„Am găsit o demonstrație admirabilă a ei, dar marginea cărții este prea îngustă și nu îmi permite să o scriu.” Straniu, deoarece, după cum a afirmat însuși Fermat, el nu a demonstrat nicio conjectură formulată de el.

Așa a început istoria a ceea ce se numește azi marea teoremă a lui Fermat. Mulți matematicieni au încercat să demonstreze, fără succes, această conjectură, care pare foarte simplă. Peste 300 de ani.

Marele matematician Euler a demonstrat-o pentru $n = 4$. Mulți dintre cei care au încercat s-o demonstreze au făcut alte descoperiri. O demonstrație recunoscută a fost formulată după 357 de ani.

În 1994 Andrew Wiles a formulat o demonstrație a acestei teoreme. Împreună cu Richard Taylor demonstrația a fost corectată și a fost prezentată la Universitatea din Boston (Anglia) în 1995.

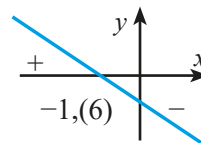
6. Inecuații de gradul I cu o necunoscută

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R}$ a inecuației $-3x + 2 < 7$.

Rezolvare. $-3x + 2 < 7 \Leftrightarrow -3x < 7 - 2 \Leftrightarrow -3x < 5 \Leftrightarrow x > -1, (6)$. Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = (-1, (6); \infty)$.

Rezolvarea inecuației aplicând semnul funcției de gradul I. $-3x + 2 < 7 \Leftrightarrow -3x + 2 - 7 < 0 \Leftrightarrow -3x - 5 < 0$. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x - 5$. Se află zeroul funcției. $-3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1, (6)$.



x	$-\infty$	$-1, (6)$	∞
semn $f(x)$	+	0	-

$S = (-1, (6); \infty)$.

- 2) Rezolvați în $\mathbb{R}$ necuația $(-8x + 3)(5x + 1) < 0$ aplicând semnul funcției de gradul I.

Rezolvare. Fie funcțiile: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -8x + 3$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5x + 1$. Se află zerourile funcțiilor: $-8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,375$; $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0,2$.

x	$-\infty$	$-0,2$	$0,375$	∞	
semn $f(x)$	+	+	0	−	
semn $g(x)$	−	0	+	+	
semnul produsului	−	0	+	0	−

Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = (-\infty; -0,2) \cup (0,375; \infty)$.

- 3) Rezolvați în $\mathbb{R}$ necuația $\frac{2x-7}{3x-4} \leq 0$ aplicând semnul funcției de gradul I.

Rezolvare. Fie funcțiile: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 7$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x - 4$. Se află zerourile funcțiilor: $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3,5$; $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, (3)$.

x	$-\infty$	$1,(3)$	$3,5$	∞	
semn $f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	
semn $g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	
semnul raportului	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = (1, (3); 3,5]$.

- 4) Rezolvați în $\mathbb{R}$ necuația $\frac{5x-11}{4x-9} > 3$ aplicând semnul funcției de gradul I.

Rezolvare. $\frac{5x-11}{4x-9} > 3 \Leftrightarrow \frac{5x-11}{4x-9} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{5x-11-12x+27}{4x-9} > 0 \Leftrightarrow \frac{-7x+16}{4x-9} > 0$.

Fie funcțiile: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 7$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x - 4$. Se află zerourile funcțiilor: $-7x + 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{7}$; $4x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 2,25$.

x	$-\infty$	$2,25$	$\frac{16}{7}$	∞	
semn $f(x)$	+	+	0	-	
semn $g(x)$	-	0	+	+	
semnul raportului	-		+	0	-

Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = \left(2,25; \frac{16}{7}\right]$.

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $-5x + 6 < 18$; b) $-9x + 11 < 25$; c) $-8x + 23 > 35$; d) $-15x + 42 > 18$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $-7x + 25 \geq 21x - 13$; b) $-25x - 19 \leq 2x + 15$; c) $-26x + 18 \geq 6x - 33$; d) $-35x + 42 \leq 19x - 16$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $3(-8x + 1) \geq 2(2x - 3)$; b) $2(-4x + 3) \geq 5(5x - 4)$; c) $7(-3x + 2) \geq 8(2x - 9)$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x + 6)(x + 3) < (x + 4)(x - 4)$; b) $(x + 2)(x + 5) < (x + 3)(x - 3)$;
c) $(x + 4)(x + 7) < (x + 7)(x - 7)$; d) $(x + 7)(x + 8) < (x + 6)(x - 6)$.
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x + 2)(x + 9) < (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$; b) $(x + 3)(x + 6) < (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$;
c) $(x + 3)(x + 8) < (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$; d) $(x + 4)(x + 7) < (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$.
6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x + 2)(x + 3) < (x + 4)(x - 5)$; b) $(x + 9)(x + 5) < (x + 2)(x - 3)$;
c) $(x + 6)(x + 4) < (x + 2)(x - 7)$; d) $(x + 3)(x + 8) < (x + 5)(x - 6)$.
7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x + 3)^2 < (x + 5)(x - 5)$; b) $(x + 4)^2 < (x + 3)(x - 3)$; c) $(x + 5)^2 < (x + 6)(x - 6)$;
d) $(x + 6)^2 < (x + 2)(x - 2)$; e) $(x + 7)^2 < (x + 8)(x - 8)$; f) $(x + 9)^2 < (x + 4)(x - 4)$.
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(2x - 5)^2 < (2x + 3)^2$; b) $(3x - 4)^2 < (3x + 2)^2$; c) $(4x - 3)^2 < (4x + 5)^2$; d) $(6x - 5)^2 < (6x + 7)^2$.
9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(2x - 9)^2 < (2x + 4)(2x - 5)$; b) $(3x - 4)^2 < (3x + 2)(3x - 5)$; c) a) $(4x - 9)^2 < (4x + 2)(4x - 7)$.
10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $(-2x + 3)(4x + 12) < 0$; b) $(-5x + 14)(3x + 24) \leq 0$;
c) $(-8x + 15)(10x - 3) \geq 0$; d) $(-3x + 48)(5x - 25) \leq 0$.
11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{4x - 8}{2x - 7} \geq 0$; b) $\frac{5x - 9}{2x - 5} \leq 0$; c) $\frac{4x - 25}{2x - 31} \geq 0$; d) $\frac{7x - 3}{12x - 1} \leq 0$; e) $\frac{8x - 12}{12x - 8} \leq 0$.
12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{-2x + 10}{3x - 27} \geq 0$; b) $\frac{-3x + 45}{7x - 56} \leq 0$; c) $\frac{-25x + 7}{21x - 84} \geq 0$; d) $\frac{-7x + 91}{25x - 75} \leq 0$; e) $\frac{-7x + 56}{23x - 69} \leq 0$.
13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{3}{3x - 2} \geq 4$; b) $\frac{3}{4x - 9} \leq 3$; c) $\frac{-5}{5x - 18} \geq 2$; d) $\frac{-3}{4x - 39} \leq 2$; e) $\frac{-6}{5x - 39} \leq 4$.
14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{8x - 3}{2x - 5} \geq 6$; b) $\frac{2x - 9}{5x - 8} \leq 2$; c) $\frac{4x - 5}{6x - 19} \geq 5$; d) $\frac{2x - 21}{3x - 31} \leq 2$; e) $\frac{7x - 30}{7x - 28} \leq 9$.
15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{x + 15}{-3x + 12} \geq 2$; b) $\frac{-3x + 4}{-7x + 49} \leq 4$; c) $\frac{5x + 7}{-2x + 14} \geq 6$; d) $\frac{8x + 9}{-5x + 17} \leq 8$.
16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{4}{(x - 3)(x + 5)} \geq 0$; b) $\frac{9}{(x - 1)(x + 9)} \leq 0$; c) $\frac{2}{(x - 5)(x + 7)} \geq 0$; d) $\frac{2}{(x - 6)(x + 8)} \leq 0$.
17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $\frac{4}{2x - 7} \geq \frac{3}{x - 8}$; b) $\frac{3}{5x - 8} \leq \frac{1}{x - 6}$; c) $\frac{3}{6x - 5} \geq \frac{1}{x - 9}$; d) $\frac{3}{3x - 6} \leq \frac{1}{x - 4}$.

7. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

■ Exercițiu rezolvat

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|-4x + 1| \leq 6$.

Rezolvare. $|-4x + 1| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq -4x + 1 \leq 6$. Dubla inecuație $-6 \leq -4x + 1 \leq 6$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} -4x + 1 \leq 6 \\ -4x + 1 \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x \leq 5 \\ -4x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,25 \\ x \leq 1,75 \end{cases}$.

Mulțimea soluției inecuației este $S = [-1,25; 1,75]$.

Propoziția compusă $f_1(x) \leq f_2(x)$ și $g_1(x) > g_2(x)$ notată $\begin{cases} f_1(x) \leq f_2(x) \\ g_1(x) > g_2(x) \end{cases}$ este un **sistem de inecuații**.

x_0 este **soluție a sistemului de inecuații**, dacă este soluție a fiecărei inecuații a sistemului.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\left| \frac{2x-1}{3x-17} \right| < 4$

Rezolvare. Inecuația inițială este echivalentă cu sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3x-17} < 4 \\ \frac{2x-1}{3x-17} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{3x-17} - 4 < 0 \\ \frac{2x-1}{3x-17} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1-12x+68}{3x-17} < 0 \\ \frac{2x-1+12x-68}{3x-17} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-10x+67}{3x-17} < 0 \\ \frac{14x-69}{3x-17} > 0 \end{cases}$$

x	5,(6) 6,7				
semn $(-10x + 67)$	+	+	0	-	
semn $(3x - 17)$	-	0	+	+	
semnul raportului	-		+	0	-

x	$\frac{69}{14}$	5,(6)
semn $(14x - 69)$	-	- 0 +
semn $(3x - 17)$	- 0 +	+
semnul raportului	+ - 0 +	

Intersectând mulțimile soluțiilor inecuațiilor se obține: $S = \left(-\infty, \frac{69}{14}\right) \cup (6,7; \infty)$.

- 2) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|2x + 3| \leq 2|x - 5|$.

Rezolvare. Deoarece 5 nu este soluție a inecuației $|2x + 3| \leq 2|x - 5| \Leftrightarrow \left| \frac{2x+3}{x-5} \right| \leq 2$.

Se rezolvă un sistem de inecuații:

$$\begin{cases} \frac{2x+3}{x-5} \leq 2 \\ \frac{2x+3}{x-5} \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-5} - 2 \leq 0 \\ \frac{2x+3}{x-5} + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3-2x+10}{x-5} \leq 0 \\ \frac{2x+3+2x-10}{x-5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{x-5} \leq 0 \\ \frac{4x-7}{x-5} \geq 0 \end{cases}$$

x	1,75		5		
semn $(4x - 7)$	−	0	+	+	
semn $(x - 5)$	−		−	0	+
semnul raportului	+	0	−		+

Prima inecuație are mulțimea soluțiilor $S_1 = (-\infty; 5)$.

A doua inecuație are mulțimea soluțiilor $S_2 = (-\infty; 1,75] \cup (5, \infty)$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1,75]$.

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|-5x + 4| \leq 8$; b) $|-9x + 18| \leq 12$; c) $|-2x + 36| \leq 17$; d) $|-4x + 24| \leq 12$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} -3x + 2 \leq 11 \\ -5x + 6 \geq -1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -9x + 5 \leq 16 \\ -8x + 9 \geq -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 11 \leq 26 \\ -4x + 7 \geq -21; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -8x + 18 \leq 31 \\ -9x + 5 \geq -14. \end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} |-3x + 14| \leq 17 \\ -8x + 19 \geq -39; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |-2x + 35| \leq 71 \\ -9x + 13 \geq -43; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |-7x + 48| \leq 95 \\ -9x + 13 \geq -43; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |-3x + 24| \leq 54 \\ -12x + 2 \geq -38. \end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} |-3x + 14| \leq 17 \\ -5x + 21 \leq 46; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |-6x + 19| \leq 39 \\ -2x + 18 \leq 16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |-6x + 5| \leq 28 \\ -3x + 7 \leq 22; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |-7x + 23| \leq 84 \\ -3x + 15 \leq 79. \end{cases}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\left| \frac{2x-1}{3x-17} \right| < 4$; b) $\left| \frac{3x-1}{8x-16} \right| < 5$; c) $\left| \frac{9x-11}{5x-25} \right| < 7$; d) $\left| \frac{2x-19}{8x-32} \right| < 3$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|3x + 6| \leq 3|2x - 11|$; b) $|5x + 4| \leq 2|4x - 17|$; c) $|6x + 12| \leq 4|5x - 16|$; d) $|8x + 19| \leq 2|7x - 21|$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 7 < 2x^2 + 5x + 15 \\ 7x^2 + 4x + 9 > 7x^2 + 2x + 21; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x^2 + 11x + 18 < 6x^2 + 26x + 22 \\ 4x^2 + 31x + 6 > 4x^2 + 39x + 43. \end{cases}$

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} (2x + 9)(3x + 7) \leq (3x + 5)(2x - 11) \\ (2x + 11)(8x + 3) > (4x + 13)(4x - 9); \end{cases}$ b) $\begin{cases} (4x - 13)(5x + 14) \leq (2x + 9)(10x - 19) \\ (5x + 11)(6x - 3) > (2x + 15)(15x - 16). \end{cases}$

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} (3x + 14)^2 \leq (3x + 5)(3x - 13) \\ (4x + 15)^2 \leq (4x + 12)(4x - 11); \end{cases}$ b) $\begin{cases} (5x + 16)^2 \leq (5x + 17)(5x - 13) \\ (6x + 23)^2 \leq (6x + 43)(6x - 47). \end{cases}$

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} (6x + \sqrt{7})^2 \leq (6x + \sqrt{11})(6x - \sqrt{11}) \\ (8x + \sqrt{5})^2 > (8x + \sqrt{13})(8x - \sqrt{13}); \end{cases}$ b) $\begin{cases} (9x + \sqrt{14})^2 \leq (9x + \sqrt{15})(9x - \sqrt{15}) \\ (5x + \sqrt{17})^2 > (5x + \sqrt{21})(5x - \sqrt{21}); \end{cases}$

c) $\begin{cases} (11x + \sqrt{13})^2 \leq (11x + \sqrt{11})(11x - \sqrt{11}) \\ (12x + \sqrt{33})^2 > (12x + \sqrt{19})(12x - \sqrt{19}); \end{cases}$ d) $\begin{cases} (17x + \sqrt{26})^2 \leq (17x + \sqrt{29})(17x - \sqrt{29}) \\ (12x + \sqrt{35})^2 > (12x + \sqrt{37})(12x - \sqrt{37}). \end{cases}$

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} -6x + 5 \leq 13 \\ -8x + 12 \geq -9 \\ 13x + 3 \geq -19; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 7 \leq 21 \\ -3x + 17 \geq -11 \\ 8x + 15 \geq -23; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + 8 \leq 20 \\ -2x + 16 \geq -12 \\ 9x + 14 \geq -27; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -5x + 2 \leq 30 \\ -4x + 26 \geq -19 \\ 6x + 18 \geq -25. \end{cases}$

12. Aflați valorile reale ale lui m pentru care ecuațiile:

a) $(3m + 2)x^2 + 8x + 7 = 0$ și $2x^2 + 5x + 4m - 1 = 0$ au soluții reale;
 b) $(5 - 2m)x^2 - 6x + 2 = 0$ și $3x^2 + 11x + 2m - 3 = 0$ au soluții reale;
 c) $(7 - 2m)x^2 + 3x + 5 = 0$ și $4x^2 + 18x + 5m - 4 = 0$ au soluții reale;
 d) $(6m - 1)x^2 + 2x + 4 = 0$ și $2x^2 + 9x + 3m - 14 = 0$ au soluții reale.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\begin{cases} \left| \frac{3x-2}{4x-5} \right| < 2 \\ \left| \frac{2-5x}{5x-6} \right| < 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left| \frac{5x-4}{7x-3} \right| < 6 \\ \left| \frac{4-3x}{2x-9} \right| < 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left| \frac{6x-7}{8x-3} \right| < 8 \\ \left| \frac{5-2x}{4x-9} \right| < 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \left| \frac{9x-4}{7x-6} \right| < 1 \\ \left| \frac{9-4x}{5x-2} \right| < 3. \end{cases}$

8. (Suplimentar) Totalități de inecuații

■ Exercițiu rezolvat

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $|-5x + 2| \geq 7$

Rezolvare. Se știe că $|-5x + 2| \geq 7 \Leftrightarrow -5x + 2 \leq -7$ sau $-5x + 2 \geq 7$. Propoziția compusă se mai scrie

sub forma totalității: $\begin{cases} -5x + 2 \leq -7 \\ -5x + 2 \geq 7. \end{cases}$

$\begin{cases} -5x + 2 \leq -7 \\ -5x + 2 \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \leq -9 \\ -5x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1,8 \\ x \leq -1. \end{cases}$ Mulțimea soluțiilor totalității este $S = (-\infty, -1] \cup [1,8; \infty)$.

Propoziția compusă $f_1(x) \leq f_2(x)$ sau $g_1(x) > g_2(x)$ notată $\begin{cases} f_1(x) \leq f_2(x) \\ g_1(x) > g_2(x) \end{cases}$ este o **totalitate de inecuații**.

x_0 este **soluție a totalității de inecuații**, dacă este soluție a cel puțin uneia dintre inecuațiile totalității.

În același mod se definește o **totalitate de ecuații** sau o **totalitate de ecuații și inecuații**.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R}$ totalitatea: $\begin{cases} \frac{x-3}{2x-1} < 0 \\ \frac{x-2}{-5x+4} > 0. \end{cases}$

Rezolvare.

x	0,5	3
semn $(x-3)$	-	- 0 +
semn $(2x-1)$	- 0 +	+
semnul raportului	+ - 0 +	

x	0,8	2
semn $(x-2)$	-	- 0 +
semn $(-5x+4)$	+ 0 -	-
semnul raportului	- + 0 -	

Mulțimea soluțiilor primei inecuații este $S_1 = (0,5; 3)$ iar mulțimea soluțiilor inecuației a doua este $S_2 = (0,8; 2)$. Mulțimea soluțiilor totalității este $S = S_1 \cup S_2 = (0,5; 3) \cup (0,8; 2) = (0,5; 3)$.

- 2) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\left| \frac{x-2}{4x-11} \right| > 3$.

Rezolvare.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{4x-11} < -3 \\ \frac{x-2}{4x-11} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{4x-11} + 3 < 0 \\ \frac{x-2}{4x-11} - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2+12x-33}{4x-11} < 0 \\ \frac{x-2-12x+33}{4x-11} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13x-35}{4x-11} < 0 \\ \frac{-11x+31}{4x-11} > 0. \end{cases}$$

x	$\frac{35}{13}$	$\frac{11}{4}$
semn $(13x-35)$	- 0 +	+
semn $(4x-11)$	-	- 0 +
semnul raportului	+ 0 - +	

x	$\frac{11}{4}$	$\frac{31}{11}$
semn $(-11x+31)$	+	+ 0 -
semn $(4x-11)$	- 0 +	+
semnul raportului	- + 0 -	

Mulțimea soluțiilor primei inecuații este $S_1 = \left(\frac{35}{13}, \frac{11}{4} \right)$ iar mulțimea soluțiilor inecuației a doua este $S_2 = \left(\frac{11}{4}, \frac{31}{11} \right)$. Mulțimea soluțiilor totalității este $S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{35}{13}, \frac{11}{4} \right) \cup \left(\frac{11}{4}, \frac{31}{11} \right)$.

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|-3x + 4| \geq 11$; b) $|-9x + 18| \geq 41$; c) $|-2x + 36| \geq 54$; d) $|-4x + 24| \geq 87$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} -5x + 3 \leq 42 \\ -2x + 3 \leq -8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x + 7 \leq 35 \\ -2x + 9 \leq -12; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -8x + 5 \leq 55 \\ -5x + 9 \leq -3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -7x + 11 \leq 5 \\ -3x + 4 \leq -12. \end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} -6x + 3 \leq 23 \\ -3x + 8 > -7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x + 16 \leq 31 \\ 2x + 18 > -5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -12x + 4 \leq 15 \\ -20x + 5 > 24; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -16x + 21 \leq 33 \\ -8x + 28 > 41. \end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} -13x + 22 < 7x + 13 \\ -19x + 11 > 6x + 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 24x + 16 < 14x + 21 \\ -17x + 9 > 13x - 17; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 13x + 15 < 53x + 75 \\ -23x + 8 > 27x - 92. \end{cases}$

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} |-3x + 11| \geq 21 \\ -2x + 3 \geq -6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |-5x + 2| \geq 18 \\ -2x + 13 \geq -7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |-7x + 3| \geq 24 \\ -4x + 13 \geq -8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |-8x + 3| \geq 37 \\ -5x + 32 \geq -1. \end{cases}$

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} |-4x + 12| \geq 35 \\ |-2x + 13| \geq 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |-3x + 4| \geq 28 \\ -6x + 5 \geq 14; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |-5x + 13| \geq 8 \\ |-3x + 11| \geq 28; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |-8x + 27| \geq 5 \\ |-9x + 42| \geq 3. \end{cases}$

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} \frac{x-4}{3x-1} < 0 \\ \frac{x-6}{-2x+9} > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-3}{5x-1} < 0 \\ \frac{x-4}{-5x+9} > 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x-8}{3x-1} < 0 \\ \frac{x-6}{-8x+9} > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x-6}{3x-1} < 0 \\ \frac{x-7}{-3x+9} > 0. \end{cases}$

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\left| \frac{2x-1}{3x-17} \right| > 9$; b) $\left| \frac{3x-2}{7x-16} \right| > 1$; c) $\left| \frac{9x-2}{3x-25} \right| > 2$; d) $\left| \frac{2x-19}{8x-3} \right| > 5$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} |-2x + 5| \geq 9 \\ \frac{x-9}{-3x+2} > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |-3x + 4| \geq 1 \\ \frac{x-5}{-7x+3} > 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |-5x + 2| \geq 6 \\ \frac{x-3}{-2x+1} > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |-4x + 3| \geq 6 \\ \frac{x-7}{-3x+5} > 0. \end{cases}$

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} \left| \frac{x-1}{8x-3} \right| > 3 \\ \frac{x-5}{-3x+7} > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left| \frac{x-2}{4x-5} \right| > 5 \\ \frac{x-3}{-2x+7} > 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left| \frac{x-5}{2x-9} \right| > 3 \\ \frac{x-6}{-5x+4} > 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \left| \frac{x-9}{6x-5} \right| > 2 \\ \frac{x-4}{-3x+5} > 0. \end{cases}$

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

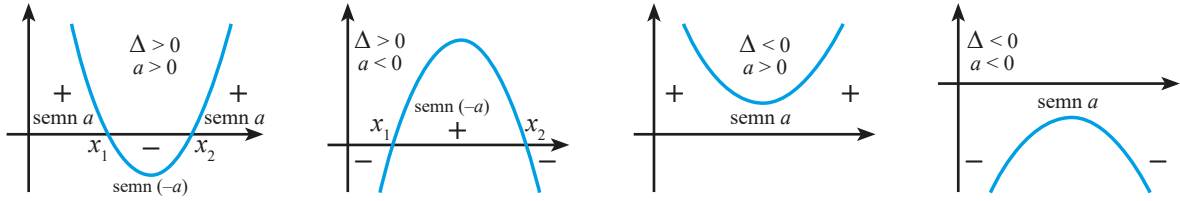
a) $\begin{cases} \left| \frac{2x-1}{4x-9} \right| \leq 1 \\ \frac{x-8}{-5x+1} > 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left| \frac{x-9}{2x-3} \right| \leq 5 \\ \frac{x-10}{-2x+8} > 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left| \frac{x-6}{2x-18} \right| < 3 \\ \frac{x-3}{5x+40} > 9; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \left| \frac{x-12}{6x-24} \right| < 2 \\ \frac{x-17}{-3x+6} > 16. \end{cases}$

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} \left| \frac{x-6}{4x-9} \right| \leq 8 \\ \frac{x-8}{4x+12} < 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left| \frac{x-9}{2x-3} \right| \leq 9 \\ \frac{x-2}{2x+6} < 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left| \frac{x-18}{3x-27} \right| < 1 \\ \frac{x-3}{8x+32} < 5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \left| \frac{x-6}{7x-35} \right| < 4 \\ \frac{x-4}{-x+6} < 21. \end{cases}$

9. Inecuații de gradul II cu o necunoscută

Semnul funcției de gradul II, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$



Dacă $\Delta > 0$, ($x_1 < x_2$), atunci $\text{semn } f(x) = \text{semn } (-a)$ pentru $x \in (x_1, x_2)$ și $\text{semn } f(x) = \text{semn } a$ pentru orice $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

Dacă $\Delta < 0$, atunci $\text{semn } f(x) = \text{semn } a$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

Rezolvare. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 3$. Se află zerourile funcției $f: f(x) = 0; \Delta > 0$, $x_1 = -3, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-3	-1	∞	
$\text{semn } f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Răspuns: Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = [-3, -1]$.

- 2) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $2x^2 - 5x + 7 > 0$.

Rezolvare. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x + 7$. Deoarece $\Delta = 25 - 56 < 0$,

Răspuns: mulțimea soluțiilor inecuației este $S = \mathbb{R}$.

- 3) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $-7x^2 + 2x - 1 > 0$.

Rezolvare. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 5x + 7$. Deoarece $\Delta = 4 - 28 < 0$, inecuația nu are soluții reale. **Răspuns:** $S = \emptyset$.

- 4) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $|3x^2 - 4x + 1| \leq 2$.

Rezolvare. $|3x^2 - 4x + 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 3x^2 - 4x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \leq 2 \\ 3x^2 - 4x + 1 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 \leq 0 \\ 3x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}, (1).$

Fie funcțiile: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 4x - 1$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x^2 - 4x + 3$. f are două zerouri; g nu

are zerouri, (2). (1) și (2) $\Rightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad 3x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ are mulțimea soluțiilor } \mathbb{R}.$

Deoarece $\Delta = 28 > 0$, $3x^2 - 4x - 1 \leq 0$ are mulțimea soluțiilor $[x_1, x_2] = \left[\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right]$.

Răspuns: Mulțimea soluțiilor inecuației este $S = \left[\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right]$.

- 5) (Suplimentar) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $|2x^2 - 7x + 1| > 2$.

Rezolvare. $|2x^2 - 7x + 1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 1 > 2 \\ 2x^2 - 7x + 1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x - 1 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 < 0 \end{cases}, (1). (*)$. $2x^2 - 7x - 1 = 0$ are

soluțiile $\frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ și $\frac{7 + \sqrt{57}}{4}$. $2x^2 - 7x + 3 = 0$ are soluțiile 0,5 și 3, (2). (1) și (2) $\Rightarrow$

$\begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \right) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{57}}{4}, \infty \right) \\ x \in (0,5; 3). \end{cases} S = \left(-\infty, \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \right) \cup (0,5; 3) \cup \left(\frac{7 + \sqrt{57}}{4}, \infty \right).$

■ Exerciții

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $x^2 + 5x + 6 \leq 0$; b) $x^2 + 7x + 12 \geq 0$; c) $x^2 + 8x + 15 \leq 0$; d) $x^2 + 12x + 35 \geq 0$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $2x^2 - 7x + 6 \leq 0$; b) $6x^2 + 8x + 3 \geq 0$; c) $2x^2 + 9x + 11 \leq 0$; d) $3x^2 + 7x + 8 \geq 0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $x^2 + 5x + 18 \leq 19x + 4$; b) $x^2 + 19x + 53 \geq 4x + 3$; c) $x^2 + 3x + 50 \leq 21x + 5$;
d) $x^2 + 12x + 73 \geq 29x + 3$; e) $x^2 + 4x + 21 \leq 34x + 7$; f) $x^2 + 9x + 43 \leq 54x + 2$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(2x + 7)(3x + 8) \leq (2x + 3)(2x - 3)$; b) $(3x + 7)(4x + 8) \leq (3x + 4)(3x - 4)$;
c) $(4x + 5)(3x + 4) \leq (4x + 3)(4x - 3)$; d) $(4x + 5)(6x + 7) \leq (5x + 3)(5x - 3)$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $3x^2 + 2x + 8 \leq 2x^2 + 5x + 12$; b) $9x^2 + 7x + 3 \leq 7x^2 + 11x + 21$;
c) $9x^2 + 4x + 7 \leq 8x^2 + 9x + 15$; d) $6x^2 + 9x + 3 \leq 5x^2 + 23x + 17$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(2x + 7)(3x + 8) \leq (x + 3)(7x + 2)$; b) $(3x + 5)(4x + 3) \leq (x + 4)(11x + 6)$;
c) $(3x + 2)(7x + 3) \leq (4x + 5)(5x + 6)$; d) $(4x + 5)(6x + 7) \leq (5x + 9)(5x + 8)$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(3x - 7)(3x - 5) \leq (2x - 3)(7x - 3)$; b) $(2x - 9)(3x - 8) \leq (6x - 1)(5x - 4)$;
c) $(2x - 3)(7x - 4) \leq (5x - 4)(3x - 2)$; d) $(3x - 5)(7x - 4) \leq (4x - 7)(5x - 3)$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(2x - 7)^2 \leq (3x + 2)(3x - 2)$; b) $(3x - 4)^2 \leq (4x + 3)(4x - 3)$; c) $(4x - 3)^2 \leq (5x + 2)(5x - 2)$;
d) $(6x - 5)^2 \leq (5x + 2)(5x - 2)$; e) $(5x - 6)^2 \leq (6x + 5)(6x - 5)$; f) $(7x - 2)^2 \leq (6x + 5)(6x - 5)$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(3x - 5)^2 \leq (2x + 5)(4x - 3)$; b) $(4x - 5)^2 \leq (3x + 4)(5x - 3)$; c) $(5x - 6)^2 \leq (4x + 3)(6x - 5)$;
d) $(6x - 1)^2 \leq (7x + 3)(5x - 6)$; e) $(6x - 5)^2 \leq (3x + 2)(5x - 7)$; f) $(7x - 3)^2 \leq (6x + 5)(8x - 5)$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(7x - 5)^2 \leq (4x + 3)^2$; b) $(5x - 4)^2 \leq (6x + 5)^2$; c) $(8x - 5)^2 \leq (7x + 4)^2$;
d) $(9x - 4)^2 \leq (3x + 7)^2$; e) $(7x - 5)^2 \leq (6x + 7)^2$; f) $(9x - 8)^2 \leq (8x + 5)^2$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{x^2 - 2}{3} + \frac{4x - 9}{2} \leq 0$; b) $\frac{x^2 - 3}{5} + \frac{3x - 4}{2} > 0$; c) $\frac{x^2 - 4}{3} + \frac{2x - 3}{4} > 0$;
d) $\frac{x^2 - 6}{3} + \frac{5x - 1}{5} > 0$; e) $\frac{x^2 - 8}{5} + \frac{2x - 7}{4} \leq 0$; f) $\frac{x^2 - 9}{3} + \frac{4x - 5}{7} > 0$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{x^2 - 2}{5} + \frac{x^2 - 2x}{7} > 1$; b) $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 - 3x}{3} > 2$; c) $\frac{x^2 - 5}{5} + \frac{x^2 - 4x}{4} < 2$;
d) $\frac{x^2 - 3}{2} + \frac{x^2 - 5x}{5} < 3$; e) $\frac{x^2 - 8}{6} + \frac{x^2 - 5x}{5} > 4$; f) $\frac{x^2 - 6}{4} + \frac{x^2 - 5x}{7} > 5$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{x^2 - 1}{3} + \frac{5x - 2}{2} - \frac{7x - 4}{6} < 0$; b) $\frac{x^2 - 8}{2} + \frac{3x - 7}{5} - \frac{6x - 5}{10} < 0$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|3x^2 - 4x + 1| \leq 7$; b) $|6x^2 - 13x + 1| \leq 7$; c) $|8x^2 - 26x + 20| \leq 5$; d) $|15x^2 - 14x + 3| \leq 11$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|x^2 - 32x + 227| \geq 7$; b) $|x^2 - 24x + 101| \geq 6$; c) $|x^2 - 31x + 162| \geq 11$; d) $|x^2 - 33x + 223| \geq 7$.

10. Metoda intervalelor

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(x^2 - 5x + 6)(-6x^2 - x + 2)(5x + 1)^2 \leq 0$.

Rezolvare. Inecuația se rezolvă, studiind semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(-6x^2 - x + 2)(5x + 1)^2$ ajutați de semnele funcțiilor: $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$; $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = -6x^2 - x + 2$; $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = (5x + 1)^2$. $x^2 - 5x + 6 = 0$ are soluțiile 2 și 3; $-6x^2 - x + 2 = 0$ are soluțiile $-0,6$ și $0,5$; $(5x + 1)^2 = 0$ are soluția $-0,2$. Zerourile lui f sunt (în ordine crescătoare): $-0,6 < -0,2 < 0,5 < 2 < 3$.

x	$-0,6$	$-0,2$	$0,5$	2	3		
semn $f_1(x)$	+	+	+	+	0	0	+
semn $f_2(x)$	-	0	+	+	0	-	-
semn $f_3(x)$	+	+	0	+	+	+	+
semn $f(x)$	-	0	+	0	+	0	-

Se selectează soluțiile inecuației și se obține:

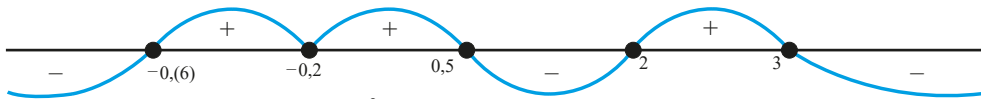
$$S = (-\infty; -0,6] \cup \{-0,2\} \cup [0,5; 2] \cup [3; \infty).$$

Observații. 1) Se constată că zerourile funcției f , împart domeniul ei de definiție în intervale pe care funcția f are semnul constant. Pentru a stabili semnul din fiecare interval deschis, este suficient să se determine semnul lui f într-un punct arbitrar al respectivului interval. De exemplu, $f(-1) = -576 < 0$, $f(0) = 12 > 0$, $f(1) = -60 < 0$ etc. Așadar, semnul lui f poate fi stabilit, procedând ca mai sus, din tabelul:

x	$-0,6$	$-0,2$	$0,5$	2	3						
semn $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

sau cu ajutorul **curbei semnelor** (discurile sunt colorate, pentru că zerourile sunt soluții).

- 2) Funcția f_3 este o funcție de gradul II care are un singur zero, $-0,2$. De aceea în $-0,2$ funcția f_3 nu își schimbă semnul și același lucru se întâmplă cu funcția f .

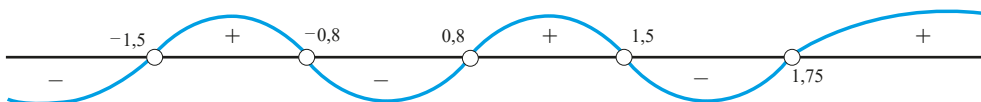


- 2) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{(4x - 7)(4x^2 - 9)}{25x^2 - 16} > 0$.

Rezolvare. Inecuația se rezolvă studiind semnul funcției definite pe domeniul maxim de definiție în $\mathbb{R}$ al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(4x - 7)(4x^2 - 9)}{25x^2 - 16}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{-0,8; 0,8\}$. $(4x - 7)(4x^2 - 9) = 0$ are soluțiile $7: 4 = 1,75$, $-1,5$ și $1,5$. $25x^2 - 16 = 0$ are soluțiile $-0,8$ și $0,8$.

Se obține: $-1,5 < -0,8 < 0,8 < 1,5 < 1,75$.

x	-1,5	-1	-0,8	0	0,8	1	1,5	1,6	1,75		
semn $f(x)$	-	0	+		-		+	0	-	0	+



$$S = (-1,5; -0,8) \cup (0,8; 1,5) \cup (1,75; \infty).$$

Observație. În acest exemplu funcția f are semne diferite pentru intervalele adiacente și niciunul dintre punctele critice care apar în tabel nu este soluție a inecuației.

Metoda intervalelor. Metoda intervalelor permite rezolvarea inecuațiilor stabilind semnul unei funcții.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \dots (a_nx + b_n)$ are zerourile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Dacă zerourile sunt diferite oricare două, atunci ele determină cel mult $n - 1$ intervale deschise adiacente disjuncte și pe fiecare interval funcția are semn constant.

Dacă zerourile sunt diferite, atunci semnul funcției alternează de la un interval la cel care urmează spre dreapta. În acest caz este suficient să se stabilească semnul pe unul dintre intervale, deoarece mai departe acționează legea alternanței semnelui.

Dacă două zerouri sunt egale, unul dintre intervalele deschise dispare și atunci pe două intervale adiacente consecutive rămase, funcția are același semn. Mai departe acționează legea alternanței semnelui. Urmăriți exemplele rezolvate.

Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)}{(c_1x + d_1)(c_2x + d_2) \dots (c_mx + d_m)}$ are zerourile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ și nu este definită în $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{n+m}$. Cele $n + m$ numere diferite determină cel mult $n + m - 1$ intervale deschise adiacente disjuncte și pe fiecare interval funcția are semn constant.

Dacă numerele sunt diferite oricare două, atunci semnul funcției alternează de la un interval la cel care urmează spre dreapta. În acest caz este suficient să se stabilească semnul pe unul dintre intervale, deoarece mai departe acționează legea alternanței semnelui.

Dacă două numere sunt egale, unul dintre intervalele deschise dispare și atunci pe două intervale alăturate determinate de ele, funcția are același semn. Mai departe acționează legea alternanței semnelui. Urmăriți exemplele rezolvate.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Rezolvați, aplicând metoda intervalelor, inecuația $\frac{4x^2 - 3x - 4}{5x^2 - 3x - 2} \leq 2$.

Rezolvare. $\frac{4x^2 - 3x - 4}{5x^2 - 3x - 2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 3x - 4}{5x^2 - 3x - 2} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2 + 3x}{5x^2 - 3x - 2} \leq 0$. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-6x^2 + 3x}{5x^2 - 3x - 2}$. $-6x^2 + 3x = 0$ are soluțiile 0 și 0,5; $5x^2 - 3x - 8 = 0$ are soluțiile -0,4 și 1.

x	-1	-0,4	0	0,5	1
semn $f(x)$	-		+	0	-

Mulțimea soluțiilor inecuației inițiale este $S = (-\infty; -0,4) \cup [0; 0,5] \cup [1, \infty)$.

- 2) Rezolvați, aplicând metoda intervalelor, sistemul de inecuații $\begin{cases} 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 \geq 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Se rezolvă fiecare inecuație, aplicând metoda intervalelor.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$; $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 4x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 2x - x^2 + 1 = 4x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - (x + 1)(x - 1) = (x - 1)(4x^2 - 3x - 1)$.

Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$; $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 2x^3 + x^2 - 14x^2 - 7x + 24x + 12 = 2x^2(2x + 1) - 7x(2x + 1) + 12(2x + 1) = (2x + 1)(2x^2 - 7x + 12)$.

$\begin{cases} 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$. f are zerourile -0,25 și 1 (de 2 ori); g are zerourile -0,5, 3 și 4.

x	-1	-0,25	0	1	2
semn $f(x)$	-	0	+	0	+

x	-0,5	0	3	4			
semn $g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Aplicând metoda intervalelor, se obțin mulțimile soluțiilor pentru fiecare inecuație: $S_1 = (-\infty; -0,25] \cup [1, \infty)$; $S_2 = [-0,5; 3] \cup [4, \infty)$.

Mulțimea soluțiilor sistemului este $S = S_1 \cap S_2 = [-0,5; -0,25]$.

■ Exerciții

1. Model. $f(x) = (x^2 - 6x + 5)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Zerourile lui f sunt în ordine crescătoare:

-2, 1, 5. Tabelul semnului:

x	-3	-2	0	1	2	5	6
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- a) $(x^2 - 5x + 6)(x + 2) \leq 0$; b) $(x^2 - 8x + 7)(x + 3) \geq 0$; c) $(x^2 - 7x + 6)(x + 5) \leq 0$;
d) $(x^2 - 9x + 8)(x + 1) \geq 0$; e) $(x^2 - 6x + 8)(x + 6) \geq 0$; f) $(x^2 - 7x + 10)(x + 8) \leq 0$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $(x^2 - 11x + 28)(x - 2) < 0$; b) $(x^2 - 12x + 27)(x - 1) > 0$; c) $(x^2 - 10x + 21)(x - 5) < 0$;
d) $(x^2 - 10x + 21)(x - 7) > 0$; e) $(x^2 - 11x + 28)(x - 6) > 0$; f) $(x^2 - 12x + 35)(x - 8) < 0$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $(x^2 - 11x + 18)(x^2 - 5x + 14) \leq 0$; b) $(x^2 + 4x - 21)(x^2 - 7x - 18) \geq 0$;
c) $(x^2 - x - 12)(x^2 - 5x - 6) \leq 0$; d) $(x^2 - 2x - 48)(x^2 - 4x - 12) \geq 0$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 49} \leq 0$; b) $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} \geq 0$; c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 64} \leq 0$; d) $\frac{x^2 - 6}{x^2 - 29} \leq 0$; e) $\frac{x^2 - 81}{x^2 - 36} \geq 0$.
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $(x^2 + 2x - 15)(x - 6)^2 \leq 0$; b) $(x^2 + 2x - 24)(x - 7)^2 \geq 0$; c) $(x^2 + 2x - 35)(x - 2)^2 \leq 0$;
d) $(x^2 - 3x - 70)(x - 9)^2 \geq 0$; e) $(x^2 + 3x - 70)(x - 4)^2 \geq 0$; f) $(x^2 + 3x - 88)(x - 5)^2 \leq 0$.
6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $(x^2 + 9x - 36)(x^2 + 5x - 24) \geq 0$; b) $(x^2 - x - 56)(x^2 + x - 72) \leq 0$;
c) $(x^2 + 8x - 48)(x^2 + 7x - 60) \geq 0$; d) $(x^2 + 11x - 60)(x^2 + 12x - 45) \leq 0$.
7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$; b) $\frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 12x + 9} \leq 0$; c) $\frac{x^2 - 8x + 17}{x^2 - 16x + 64} \leq 0$; d) $\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 10x + 25} \geq 0$.
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $x^4 - 11x^2 + 28 < 0$; b) $x^4 - 29x^2 + 100 \leq 0$; c) $x^4 - 40x^2 + 144 \geq 0$; d) $x^4 - 50x^2 + 49 > 0$.
9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $\frac{x^4 - 25x^2 + 144}{x^4 - 82x^2 + 81} \leq 0$; b) $\frac{x^4 - 226x^2 + 225}{x^4 - 73x^2 + 576} \geq 0$; c) $\frac{x^4 - 257x^2 + 256}{x^4 - 325x^2 + 324} \leq 0$; d) $\frac{x^4 - 37x^2 + 36}{x^4 - 53x^2 + 196} \geq 0$.
10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:
a) $\begin{cases} x^4 - 28x^2 + 75 < 0 \\ x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^4 - 26x^2 + 25 < 0 \\ x^4 - 101x^2 + 100 \geq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \\ x^4 - 41x^2 + 400 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^4 - 9x^2 + 20 < 0 \\ x^4 - 17x^2 + 42 \geq 0 \end{cases}$.
11. Rezolvați în $\mathbb{R}$:
a) $\begin{cases} x^4 - 15x^2 + 50 < 0 \\ x^4 - 12x^2 + 27 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^4 - 26x^2 + 88 < 0 \\ x^4 - 13x^2 + 40 \geq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^4 - 17x^2 + 60 < 0 \\ x^4 - 21x^2 + 80 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^4 - 32x^2 + 175 < 0 \\ x^4 - 19x^2 + 60 \geq 0 \end{cases}$.
12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $x^2 - 15x + 56 \leq 6$; b) $x^2 - 8x + 17 \geq 5$; c) $x^2 - 7x + 25 \leq 13$; d) $x^2 - 9x + 20 \geq 6$.
13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $x^4 - 12x^2 + 39 < 7$; b) $x^4 - 15x^2 + 62 > 8$; c) $x^4 - 17x^2 + 87 < 15$; d) $x^4 - 26x^2 + 178 > 18$.
14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $\frac{5x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 2x - 3} \leq 1$; b) $\frac{2x^2 - 6x - 3}{5x^2 - 4x - 2} \geq 3$; c) $\frac{7x^2 - 6x - 5}{3x^2 - 8x - 3} \leq 4$; d) $\frac{x^2 - 10x - 1}{9x^2 - 2x - 1} \geq 5$.
15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
a) $(x + 4)^2(3x + 2)^3(4x - 5) \leq 0$; b) $(x + 6)^4(2x + 5)^3(3x - 8) \geq 0$;
c) $(2x + 7)^2(5x + 12)^5(3x - 13) \leq 0$; d) $(3x + 8)^3(8x + 25)^6(3x - 27) \geq 0$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^4 - 10x^2 + 33 < 7 \\ x^4 - 12x^2 + 38 \geq 11; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^4 - 14x^2 + 50 < 10 \\ x^4 - 8x^2 + 25 \geq 10; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^4 - 24x^2 + 156 < 16 \\ x^4 - 15x^2 + 66 \geq 12; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x^4 - 23x^2 + 150 < 18 \\ x^4 - 15x^2 + 76 \geq 20; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^4 - 24x^2 + 154 < 11 \\ x^4 - 15x^2 + 48 \geq 12; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^4 - 18x^2 + 192 < 12 \\ x^4 - 31x^2 + 232 \geq 12. \end{cases} \end{array}$$

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (x-1)(2x^2+x-6) \leq 0; & \text{b)} (x-2)(6x^2+x-2) \geq 0; & \text{c)} (x-3)(10x^2+11x-6) \geq 0; \\ \text{d)} (x-4)(6x^2-23x+20) \leq 0; & \text{e)} (x-7)(6x^2-3x-45) \geq 0; & \text{f)} (x-6)(10x^2+39x-27) \geq 0. \end{array}$$

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^2 - 22x + 85 < 0 \\ x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \geq 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 - 34x + 120 < 0 \\ x^3 - 17x^2 + 34x - 8 \geq 0; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 - 26x + 133 < 0 \\ x^3 - 16x^2 + 32x - 8 \geq 0; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x^2 - 34x + 120 < 0 \\ x^3 - 2x^2 - 9x + 18 \geq 0; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^2 - 34x + 120 < 0 \\ x^3 + 3x^2 - 16x - 48 \geq 0; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^2 - 21x + 110 < 0 \\ x^3 + x^2 - 3x - 3 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^4 - 17x^2 + 16 < 0 \\ 16x^3 - 64x^2 - 3x + 12 \geq 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^4 - 197x^2 + 196 < 0 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x - 27 \geq 0; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^4 - 65x^2 + 64 < 0 \\ 9x^3 - 15x^2 - 3x + 5 \geq 0; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \\ 4x^3 - 8x^2 - 9x + 18 \geq 0; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^4 - 26x^2 + 25 < 0 \\ 2x^3 + 3x^2 - 32x - 48 \geq 0; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^4 - 257x^2 + 256 < 0 \\ 16x^3 - 4x^2 - 12x + 3 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 9x^3 - 27x^2 + 13x - 39 < 0 \\ 4x^3 - 3x^2 - 8x + 6 \geq 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^3 - 13x^2 + 2x - 26 < 0 \\ x^3 - 11x^2 + 5x - 55 \geq 0; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^3 - 15x^2 - 4x + 60 < 0 \\ x^3 - 19x^2 + 3x - 57 \geq 0; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x^3 + 4x^2 - x - 4 < 0 \\ 3x^3 + 5x^2 - 12x - 20 \geq 0; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 5x^3 + 3x^2 - 45x - 27 < 0 \\ x^3 + 3x^2 - 25x - 75 \geq 0; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 16x^3 - 32x^2 - 15x + 30 < 0 \\ 2x^3 + 19x^2 - 4x - 38 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

21. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 18x + 27 < 0 \\ 3x^3 + x^2 - 12x - 4 \geq 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x^3 - 4x^2 - 8x + 64 < 0 \\ 3x^3 - 4x^2 - 27x + 36 \geq 0; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x^3 + 5x^2 - 75x - 125 < 0 \\ 4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 \geq 0; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 5x^3 + 6x^2 - 5x - 6 < 0 \\ 2x^3 + 7x^2 - 8x - 28 \geq 0; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 36x - 27 < 0 \\ 5x^3 + 7x^2 - 80x - 112 \geq 0; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 18x^3 - 9x^2 - 6x + 3 < 0 \\ 4x^3 - 20x^2 - 49x + 245 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \left| \frac{x-1}{4x-7} \right| \leq 1 \\ \frac{x-3}{-2x+1} > 2; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \left| \frac{x-9}{2x-3} \right| \leq 1 \\ \frac{x-5}{-3x+9} > 3; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \left| \frac{x-6}{2x-18} \right| < 3 \\ \frac{x-2}{4x+36} > 1; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \left| \frac{x-9}{6x-30} \right| < 2 \\ \frac{x-1}{-3x+9} > 3. \end{cases} \end{array}$$

23. Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \left| \frac{x-6}{4x-9} \right| \leq 1 \\ \frac{x-2}{4x+12} < 4; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \left| \frac{x-8}{3x-8} \right| \leq 1 \\ \frac{x-6}{4x+30} < 2; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \left| \frac{x-18}{3x-27} \right| < 3 \\ \frac{x-3}{8x+32} < 2; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \left| \frac{x-6}{7x-35} \right| < 4 \\ \frac{x-4}{-x+6} < 21. \end{cases} \end{array}$$

24. Aflați valorile lui m pentru care suma pătratelor soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - (4m-3)x + m = 0$ este mai mică decât 5.

25. Aflați valorile lui m pentru care suma pătratelor soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - (2m-5)x + m = 0$ este mai mare decât 4.

26. Aflați numerele reale m pentru care ecuația $x^2 - (2m-3)x + 7 = 0$ are soluții pozitive.

Sinteză

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $(-3x + 7)(5x + 14) < 0$; b) $(-8x + 26)(4x + 29) \leq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{3x-9}{5x-3} \geq 0$; b) $\frac{6x-2}{4x-3} \leq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{2}{5x-2} \geq 3$; b) $\frac{1}{3x-8} \leq 2$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{2x-3}{6x-7} \geq 2$; b) $\frac{3x-2}{6x-7} \leq 1$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{x+5}{-2x+11} \geq 2$; b) $\frac{-x+3}{-3x+16} \leq 1$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{59}{(x-8)(x+6)} \geq 0$; b) $\frac{7}{(x-3)(x+5)} \leq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{5}{3x-7} \geq \frac{2}{x-9}$; b) $\frac{1}{4x-7} \geq \frac{3}{x-4}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $x^2 + 9x - 136 \leq 0$; b) $x^2 + 7x - 368 \geq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $x^2 + 7x + 23 \leq 2x + 37$; b) $x^2 + 9x + 5 \geq 3x + 18$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $3x^2 - 5x + 7 \leq 0$; b) $9x^2 + 8x + 2 \geq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $|5x^2 - 6x + 2| \leq 3$; b) $|2x^2 - 8x + 9| \leq 13$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x^2 - 4x + 7 \leq 0 \\ x^2 - 20x + 91 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - 17x + 66 < 0 \\ x^2 - 25x + 126 \geq 0 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} \left| \frac{2x-3}{5x-4} \right| < 2 \\ \left| \frac{5-2x}{6x-4} \right| < 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \left| \frac{4x-7}{3x-7} \right| < 3 \\ \left| \frac{3-4x}{8x-3} \right| < 1 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $|x^2 - 48x + 141| \geq 6$; b) $|x^2 - 27x + 159| \geq 7$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$: a) $\begin{cases} |-8x + 19| \geq 4 \\ |x^2 - 3x - 147| \geq 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} |-7x + 5| \geq 29 \\ |x^2 - 2x - 203| \geq 8 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x^4 - 27x^2 + 50 < 0 \\ x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^4 - 20x^2 + 48 < 0 \\ x^4 - 40x^2 + 144 \geq 0 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$: a) $\begin{cases} x^4 - 12x^2 + 32 < 0 \\ x^4 - 14x^2 + 45 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^4 - 34x^2 + 225 < 0 \\ x^4 - 16x^2 + 63 \geq 0 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $x^3 - 8x^2 - 3x - 18 \leq 0$; b) $x^3 - 15x^2 + 72x - 108 \geq 0$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x^2 - 24x + 119 < 0 \\ x^3 - 14x^2 + 65x - 100 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - 35x + 216 < 0 \\ 16x^3 - 40x^2 + 17x - 2 \geq 0 \end{cases}$.
- Rezolvați în $\mathbb{R}$: a) $\begin{cases} x^4 - 21x^2 + 80 < 0 \\ 9x^3 - 51x^2 + 31x - 5 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^4 - 30x^2 + 125 < 0 \\ 4x^3 - 14x^2 + 12x + 72 \geq 0 \end{cases}$.
- Aflați valorile lui m pentru care suma păratelor soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - (3m - 4)x + 2m = 0$ este mai mică decât 8.
- Aflați valorile lui m pentru care suma păratelor soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - (m - 5)x + 6m = 0$ este mai mare decât 12.
- Aflați valorile lui m pentru care suma păratelor soluțiilor reale ale ecuației $x^2 - (2m - 3)x + 3m = 0$ este mai mică decât 9.

Evaluare

I

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $(-2x + 18)(4x + 19) < 0$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{2x - 19}{5x - 14} \geq 0$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{17}{(x - 9)(x + 7)} \geq 0$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $|3x^2 - 4x + 1| \leq 5$.
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $|x^2 - 2x - 203| \geq 8$.
6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{x + 3}{-5x + 21} \geq 2$.
7. Rezolvați în $\mathbb{R}$:
 $\begin{cases} |-5x + 25| \geq 3 \\ |x^2 - 5x - 211| \geq 7 \end{cases}$
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:
 $\begin{cases} x^4 - 15x^2 + 56 < 0 \\ x^4 - 11x^2 + 30 \geq 0 \end{cases}$
9. Rezolvați în $\mathbb{R}$:
 $\begin{cases} x^4 - 15x^2 + 56 < 0 \\ x^3 - 14x^2 + 65x - 100 \geq 0 \end{cases}$

II

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $(-5x + 25)(4x + 17) < 0$.
2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{2x - 23}{5x - 12} \geq 0$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{23}{(x - 6)(x + 2)} \geq 0$.
4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $|15x^2 - 8x - 1| \leq 2$.
5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $|x^2 - 4x + 173| \geq 8$.
6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 $\frac{x + 2}{-5x + 18} \geq 3$.
7. Rezolvați în $\mathbb{R}$:
 $\begin{cases} |-4x + 28| \geq 3 \\ |x^2 - 7x - 121| \geq 23 \end{cases}$
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:
 $\begin{cases} x^4 - 17x^2 + 72 < 0 \\ x^4 - 13x^2 + 40 \geq 0 \end{cases}$
9. Rezolvați în $\mathbb{R}$:
 $\begin{cases} x^4 - 13x^2 + 42 < 0 \\ x^3 - 13x^2 + 55x - 75 \geq 0 \end{cases}$

Puncte	0-5	6-24	24-32	33-55	56-65	66-75	76-85	86-95	96-100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Din istoria matematicii

Leonardo din Pisa sub numit **Fibonacci** (1175–1250) a fost educat în Africa. Fiind negustor, a călătorit în Europa și Asia Mică.

S-a remarcat prin cunoștințele sale matematice. În 1202 a scris cartea *Liber abaci*, o traducere liberă a cunoștințelor matematice culese de el în timpul călătoriilor. A introdus în Europa notația arabă pentru numere și metodele de calcul hinduse.

A fost primul care a utilizat linia de fracție. În cartea *Liber abaci* se află și problema generațiilor de iepuri, care conduce la șirul pe care în 1870 matematicianul francez Édouard Lucas l-a numit șirul lui Fibonacci. La același șir se ajunge, studiind înmulțirea unor bacterii.

A mai scris cărțile *Liber geometriae* (1220) și *Liber quadratorum* (1225), unde s-a ocupat de ecuații de gradul I și II și de unele ecuații de gradul III.



Fibonacci
(1175–1250)

Suplimentar

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația bipătratică:

a) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$; b) $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$; c) $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$; d) $x^4 - 11x^2 - 26 = 0$;
e) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; f) $x^4 - 12x^2 - 13 = 0$; g) $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$; h) $x^4 - 14x^2 - 15 = 0$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația bipătratică:

a) $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$; b) $x^4 + 12x^2 + 20 = 0$; c) $x^4 + 11x^2 + 18 = 0$; d) $x^4 + 15x^2 + 50 = 0$;
e) $x^4 + 11x^2 + 24 = 0$; f) $x^4 + 17x^2 + 70 = 0$; g) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$; h) $x^4 + 15x^2 + 50 = 0$.

3. Fie ecuația $x^2 - Sx + P = 0$. Fără să se afle soluțiile (x_1 și x_2) ecuației se poate afla: suma pătratelor soluțiilor; suma cuburilor soluțiilor; suma inverselor soluțiilor ecuației; suma pătratelor inverselor soluțiilor etc.

$$x_1 + x_2 = S, \quad x_1 x_2 = P. \text{ Atunci: } S^{(2)} = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P;$$

$$S^{(3)} = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3SP;$$

$$S^{(-1)} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}; \quad S^{(-2)} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{S^{(2)}}{P^2}.$$

Pentru fiecare ecuație, fără să se afle soluțiile ei, aflați: suma pătratelor soluțiilor; suma cuburilor soluțiilor; suma inverselor soluțiilor ecuației; suma pătratelor inverselor soluțiilor ecuației.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$; b) $x^2 + 6x + 2 = 0$.

4. Fără să rezolvați ecuația, aflați: $S(4) = x_1^4 + x_2^4$.

a) $x^2 - 7x - 2 = 0$; b) $x^2 - 6x + 4 = 0$; c) $x^2 + 9x + 5 = 0$; d) $x^2 - 8x + 5 = 0$.

5. *Indicație.* Pentru a rezolva în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x-2} = 3$, se aplică substituția $y = \frac{x+2}{x}$ și se obține $y - \frac{2}{y} = 3$. Rezolvați pe DVA în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x+2} = 3$; b) $\frac{x+3}{x} - \frac{5x}{x+3} = -4$; c) $\frac{x-4}{x} + \frac{5x}{x-4} = 6$; d) $\frac{x-5}{x} + \frac{7x}{x-5} = 8$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} x + 3(x + 2(y - 2)) = -8 \\ 3x - 2(4y + 5(x - 3)) = 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y + 5(3x - 2(y - 1)) = 15(3 - y) - 2 \\ 4x - 3(5(2y + 3) + 4x) = 4y - 1 \end{cases}$.

7. Rezolvați în $DVA \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele: a) $\begin{cases} \frac{3}{x+y} - \frac{5}{x-y} = 4 \\ \frac{7}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 25 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{3}{x+y-9} - \frac{2}{x-y+4} = -5 \\ \frac{5}{x+y-9} - \frac{8}{x-y+4} = 1 \end{cases}$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} |x| + |y| = 5 \\ |x| - |y| = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + |2y - 5| = 7 \\ -x + |6y - 15| = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} |x - 11| - |2y + 10| = -2 \\ |3x - 33| + |7y + 35| = 7 \end{cases}$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} |\sqrt{7} - 3|x + |\sqrt{5} - 1|y = x(1 - \sqrt{7}) + \sqrt{5}y \\ |\sqrt{3} - 2|x - |\sqrt{5} - 3|y = -\sqrt{3}x + \sqrt{5}y - 4 \end{cases}$.

10. Aflați domeniul de definiție (D) în $\mathbb{R}$ al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 10} + \frac{4x - 3}{\sqrt{x^4 - 17x^2 + 70}}$; b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 18x^2 + 77} + \frac{5x^2 - 32}{\sqrt{x^4 - 19x^2 + 78}}$.

11. Aflați câte numere din $\mathbb{N}$ de o cifră nu se află în D al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 - 2)(x^4 - 15x^2 + 56)}{(x^2 - 6)(x^4 - 21x^2 + 90)}}$.

Pentru concursuri

■ Exerciții

1. Fie numerele reale pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$. Demonstrați propoziția:

$$\sum \frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Rezolvare. $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1 = s - (x_2 + x_3 + \dots + x_n)$.

$$\begin{aligned} \sum \frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} &= s \sum \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} - \sum 1 \geq sn \sqrt[n]{\prod \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n}} - n = \\ &= \frac{n}{n-1} (\sum (x_2 + x_3 + \dots + x_n) + s) \sqrt[n]{\prod \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n}} - n \geq \\ &= \frac{n}{n-1} (\sum (x_2 + x_3 + \dots + x_n)) \sqrt[n]{\prod \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n}} - n \geq \\ &= \frac{n^2}{n-1} \sqrt[n]{\prod (x_2 + x_3 + \dots + x_n)} \sqrt[n]{\prod \frac{1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n}} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Egalitate are loc pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

2. Fie numere reale pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ și $b_1, b_2, \dots, b_n$. Demonstrați propoziția:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \right) \geq 4n^2.$$

Rezolvare. Se aplică inegalitatea mediilor $a_i + b_i \geq 2\sqrt{a_i b_i}$. Rezultă: $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq 4 \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Rămîne de demonstrat că $4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \right) \geq 4n^2$.

Fie $x_i = a_i b_i$, (1). Conform Exercițiului 1, p. 19, $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2$, (2).

(1) și (2) implică: $4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \right) \geq 4n^2$ este adevărată.

3. Arătați că $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Rezolvare. $(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$ implică: $2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$, $3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$, $4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$, ..., $[(n-1)+1]^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$, $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

După adunare, rezultă:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 1 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n \Leftrightarrow 3 \sum_{i=1}^n i^2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \Leftrightarrow \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= (n+1) \left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1 \right] \Leftrightarrow 3 \sum_{i=1}^n i^2 = (n+1) \left(n^2 + 2n - \frac{3n}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

4. Aplicând propoziția demonstrată, calculați $\sum_{i=1}^{50} i^2$.

Rezolvare. a) Pentru $n = 50$ rezultă $\sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 25 \cdot 17 \cdot 101 = 42\,925$.

Elemente de statistică și de probabilități

1. Noțiunea de probabilitate

Pacioli (1445–1514) a atras atenția asupra jocurilor de noroc. *Luca Pacioli* a fost un călugăr franciscan, care a publicat în 1494 cartea *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitas* în care a dorit să adune toate cunoștințele matematice. Este considerat părintele contabilității.

Cardan (1501–1576) (*Gerolamo Cardano* a publicat în 1545 cartea *Ars Magna*, unde apar pentru prima dată soluțiile ecuației cubice), a scris în 1560 cartea despre jocurile de noroc *Liber de ludo aleae*, publicată abia în 1663, tratează pentru prima dată sistematic probabilitatea.

Galileo (1564–1642) (fizician, matematician, astronom și filosof italian) a remarcat că la aruncarea a trei zaruri suma numerelor care cad este egală cu 10 de mai multe ori decât este egală cu 9.

Apariția calculului probabilităților este legată de corespondența dintre **Fermat** (1601–1665) și **Pascal** (1623–1662) din 1654 cu privire la două probleme propuse lui Pascal de către cavalerul de Méré (1607–1685). Acesta din urmă a observat că dacă joacă de un număr suficient de ori, câștigă sigur. Cercetările lor nu au fost publicate.

Christian Huygens (1629–1695) (matematician, astronom și fizician olandez) a reluat cercetările lui Fermat și Pascal și a publicat în 1657, încurajat fiind de Pascal, primul tratat de probabilități.

Kolmogorov a fondat în 1936 teoria probabilităților. Mai departe calculul probabilităților s-a dezvoltat în două direcții: teorie și aplicații.

- Aruncarea unui zar, extragerea unei cărți dintr-un pachet de cărți de joc, extragerea unei bile dintr-o urnă etc. sunt exemple de **experimente aleatoare**.

- Rezultatul unui experiment nu poate fi anticipat cu certitudine. O repetare a unui experiment aleator (de exemplu, o aruncare a unui zar) este o **probă**, iar rezultatul unei probe este un **eveniment** (de exemplu, la aruncarea zarului a căzut fața cu 3 puncte).

- Unui eveniment îi asociem o mulțime (de exemplu, la aruncarea unui zar evenimente sunt $\{1\}$ – apariția feței cu un punct, $\{2\}$ – apariția feței cu două puncte, $\{3\}$ – apariția feței cu trei puncte etc.) și îi corespunde un **număr de cazuri favorabile** dintr-un **număr de cazuri egal posibile** (de exemplu, evenimentul $\{1\}$ are 1 caz favorabil din 6 cazuri egal posibile).

- **Evenimentul imposibil** (i se asociază mulțimea vidă, $\emptyset$) nu se poate realiza niciodată, iar **evenimentul sigur** se realizează întotdeauna (se notează E).

- **Probabilitatea de realizare a unui eveniment** (notată p) este **raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor egal posibile**. p este un număr din intervalul $[0, 1]$.

- **Evenimentele echiprobabile** sunt evenimentele care au aceeași probabilitate de apariție.

Experimentele se desfășoară în condiții ideale. Zarurile sunt perfecte astfel încât nu apare o față de mai multe ori decât alta. La fel când este vorba despre o monedă sau despre extragerea unei bile dintr-o urnă. De aceea, aceasta este **probabilitatea teoretică**.

- Fie experimentul aleator aruncarea unei monede. Moneda are două fețe: stema și banul. Evenimentele acestui experiment sunt $B = \{\text{apariția banului}\}$ și $S = \{\text{apariția stemei}\}$. Este imposibil să nu apară după aruncare niciuna dintre fețele monedei (evenimentul imposibil) și la orice aruncare cade una dintre fețe (evenimentul sigur).

Numărul cazurilor egal posibile = numărul fețelor monedei = 2. Numărul cazurilor favorabile este 1 pentru fiecare dintre evenimentele B și S . $p(B) = p(S) = 0,5$. Evenimentele B și S sunt echiprobabile.

• Într-o urnă sunt 3 bile albe și 5 bile negre. Evenimentele experimentului de extragere a unei bile din urnă: $A = \{\text{aparitia unei bile albe}\}$, $N = \{\text{aparitia unei bile negre}\}$, evenimentul imposibil = $\{\text{nu apare o bilă albă sau neagră}\} = \emptyset$, evenimentul sigur = $\{\text{aparitia unei bile albe sau negre}\}$. Numărul cazurilor egal posibile = numărul bilelor din urnă = 8. Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A = numărul bilelor albe = 3, Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului N = numărul bilelor negre = 5. $p(A) = 3 : 8 = 0,375$; $p(N) = 5 : 8 = 0,625$. Cele două evenimente nu sunt echiprobabile.

■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - ... sunt exemple de experimente aleatoare.
 - ... este o probă.
 - ... este un eveniment.
 - Probabilitatea unui eveniment este ...
- Aflați numărul cazurilor egal posibile în cazul experimentului:
 - aruncarea a două monede;
 - aruncarea a trei monede;
 - aruncarea a patru monede;
 - aruncarea a cinci monede;
 - aruncarea a zece monede;
 - aruncarea a cincisprezece monede.
- Aflați numărul cazurilor egal posibile în cazul experimentului:
 - aruncarea a două zaruri;
 - aruncarea a trei zaruri;
 - aruncarea a patru zaruri;
 - aruncarea a cinci zaruri;
 - aruncarea a șapte zaruri;
 - aruncarea a nouă zaruri.
- Aflați numărul cazurilor egal posibile în cazul experimentului de extragere a unei bile dintr-o urnă cu:
 - 7 bile albe, 3 bile roșii, 6 bile albastre;
 - 9 bile albe, 5 bile roșii, 2 bile albastre;
 - 4 bile albe, 9 bile roșii, 7 bile albastre;
 - 2 bile albe, 9 bile roșii, 22 bile albastre.
- Într-o urnă sunt 5 bile albe, 2 bile negre, 7 bile roșii și 10 bile albastre. Se extrage o bilă din urnă. Înregistrați evenimentul și numărul cazurilor favorabile:
 - extragerea unei bile albe;
 - extragerea unei bile negre;
 - extragerea unei bile roșii;
 - extragerea unei bile albastre
 - extragerea a două bile negre;
 - extragerea a două bile roșii.
- O piramidă triunghiulară are toate fețele triunghiuri echilaterale congruente de culori diferite (albă, neagră, roșie, galbenă). La o aruncare piramida se așază pe o față de o anumită culoare. Înregistrați evenimentul și numărul cazurilor favorabile:
 - piramida s-a așezat pe fața albă;
 - piramida s-a așezat pe fața neagră;
 - piramida s-a așezat pe fața roșie;
 - piramida s-a așezat pe fața galbenă.
- Într-o urnă sunt 6 bile albe, 5 bile negre, 8 bile roșii, 6 bile verzi, 5 bile maro și 6 bile albastre. Aflați probabilitatea de:
 - extragere a unei bile albe;
 - extragere a unei bile negre;
 - extragere a unei bile roșii;
 - extragere a unei bile albastre;
 - extragere a unei bile verzi;
 - extragere a unei bile maro.
 Care evenimente sunt echiprobabile?
- În 8 plicuri s-au pus câte o bancnotă de 5 lei; în 6 plicuri s-au pus câte o bancnotă de 10 lei; în 6 plicuri s-au pus câte o bancnotă de 20 lei; în 3 plicuri s-au pus câte o bancnotă de 50 lei. Se amestecă bine plicurile și se extrage unul. Aflați probabilitatea ca în el să se afle o bancnotă de:
 - 5 lei;
 - 10 lei;
 - 20 lei;
 - 50 lei.
- Într-o urnă sunt bile numerotate diferit de la 1 până la 23. Se extrage o bilă din urnă. Aflați probabilitatea ca numărul de pe bilă:
 - să se dividă cu 4;
 - împărțit la 4 să dea restul 1;
 - împărțit la 4 să dea restul 2;
 - împărțit la 4 să dea restul 3;
 - să se dividă cu 3;
 - să se dividă cu 5.
- Într-o urnă sunt 20 de bile numerotate de la 1 până la 20. Se extrage o bilă din urnă. Aflați probabilitatea ca bila extrasă să aibă numărul:
 - mai mic decât 7;
 - cuprins între 6 și 13;
 - cuprins între 12 și 15;
 - mai mare decât 15.
- Fie experimentul de la exercițiul 10. Aflați probabilitatea ca bila extrasă să aibă numărul:
 - divizibil cu 5;
 - divizibil cu 6;
 - divizibil cu 7;
 - divizibil cu 8;
 - mai mare decât 7;
 - mai mare decât 9;
 - mai mare decât 13;

- h) mai mic sau egal cu 5; i) mai mic sau egal cu 8; j) mai mic sau egal cu 12;
k) nedivizibil cu unul dintre numerele 2, 3, 5, 7.

Care dintre evenimente sunt echiprobabile?

- 12.** Confecționați cărți de joc pe care înscrieți numerele de la 1 până la 60. Amestecați pachetul și extrageți o carte. Aflați probabilitatea ca pe ea să fie:

- | | |
|--|--|
| a) o putere cu exponent natural a lui 2; | b) o putere cu exponent natural a lui 3; |
| c) o putere cu exponent natural a lui 4; | d) o putere cu exponent natural a lui 5; |
| e) o putere cu exponent natural a lui 6; | f) o putere cu exponent natural a lui 7; |
| g) o putere cu exponent natural a lui 2 sau a lui 3; | |
| h) o putere cu exponent natural a lui 3 sau a lui 4; | |
| i) o putere cu exponent natural a lui 4 sau a lui 5; | |
| j) o putere cu exponent natural a lui 2 sau a lui 3 sau a lui 4. | |

Care dintre evenimente sunt echiprobabile?

- 13.** Fie experimentul de la Exercițiul 12. Aflați probabilitatea ca pe cartea extrasă să fie:

- a) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[1, 90]$;
b) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[100, 296]$;
c) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[310, 500]$;
d) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[506, 700]$;
e) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[710, 1\ 000]$;
f) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[1\ 010, 2\ 000]$;
g) rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[2\ 010, 4\ 000]$

Care dintre evenimente sunt echiprobabile?

- 14.** Se aruncă două zaruri. Aflați probabilitatea ca suma numerelor care apar să fie egală:

- a) cu 4; b) cu 5; c) cu 7; d) cu 8; e) cu 11; f) cu 12.

- 15.** Se aruncă trei zaruri. Aflați probabilitatea ca suma numerelor care apar să fie egală:

- a) cu 4; b) cu 5; c) cu 7; d) cu 8; e) cu 12; f) cu 15.

- 16.** Într-o urnă sunt 6 bile albe și un număr de bile negre. Aflați:

- a) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{6}{13}$ și câte bile negre sunt în urnă;
b) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{6}{19}$ și câte bile negre sunt în urnă;
c) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{6}{25}$ și câte bile negre sunt în urnă;
d) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{6}{31}$ și câte bile negre sunt în urnă.

- 17.** Într-o urnă sunt 9 bile albe și un număr de bile negre. Aflați:

- a) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{3}{4}$ și câte bile negre sunt în urnă;
b) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{3}{7}$ și câte bile negre sunt în urnă;
c) probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{2}{3}$ și câte bile negre sunt în urnă.

2. Colectarea, organizarea și reprezentarea datelor

• **Probabilitatea empirică și frecvența relativă.** Fie n_A numărul de realizări ale evenimentului A într-o serie de n probe.

Frecvența relativă a evenimentului A este: $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

• **Statistica matematică** se ocupă cu înregistrarea, analiza și interpretarea datelor referitoare la un fenomen (natural sau social) și cu elaborarea de previziuni.

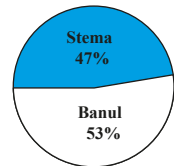
• **Statistica descriptivă** culege și înregistrează datele, după care statistica matematică le grupează, le analizează și le interpretează formulând predicții pentru comportarea viitoare a fenomenului respectiv.

• Mulțimea care este obiectul unei analize statistice reprezintă o **populație statistică**. Fiecare element al populației statistice este o **unitate statistică** sau **indiviz**, iar numărul acestor elemente este **volumul populației statistice**.

• Într-o analiză statistică se studiază **caracteristici cantitative** (vârsta, înălțimea, talia, masa etc.) și **caracteristici calitative** sau **atribute** (culoarea părului, a ochilor, forma feței, înclinații, dorințe, calitatea unui produs etc.). Caracteristicile cantitative pot avea valori izolate și se numesc **discrete (discontinue)** sau pot avea toate valorile dintr-un interval de numere și în acest caz se numesc **continue**.

• Analiza numerică în raport cu o singură caracteristică, conduce la **serii statistice** formate din perechi de numere. În cazul unui test școlar rezultatele sunt perechile (notă, număr de elevi). În cazul caracteristicilor discrete, reprezentarea grafică a seriei se face cu bare.

• Aruncând o monedă de 100 de ori s-au înregistrat datele: banul (B) 53 de ori; stema (S) 47 de ori. Se pot calcula frecvențele fiecărui eveniment: $f_n(B) = 0,53 = 53\%$, $f_n(S) = 0,47 = 47\%$. Spre deosebire de probabilitatea teoretică care acordă șanse egale celor două evenimente, statistica înregistrează date reale legate de o monedă concretă și în baza rezultatelor obținute se pot anticipa mai bine șansele. Rezultatele au și ilustrația grafică din dreapta.



În acest caz, populația statistică este mulțimea fețelor monedei cu doi indivizi și caracteristica este cantitativă discretă (numărul de apariții).

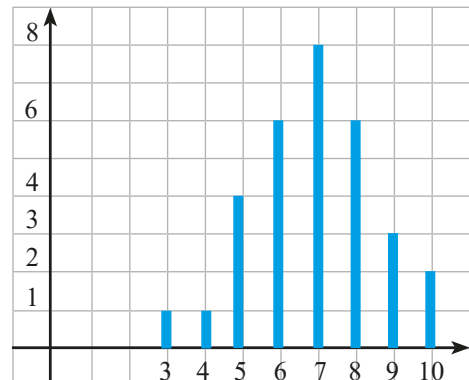
Experimentul se poate executa cu 100 de monede. După înregistrarea rezultatelor pentru fiecare monedă, se calculează media aritmetică a rezultatelor. Se calculează frecvența relativă a fiecărui eveniment. În urma acestor rezultate se poate anticipa mai bine șansa de realizare a fiecărui eveniment.

• Din 10 000 de aparate produse de o companie s-a constatat că 2 prezintă defecte de fabricație. Neșansa să cumperi un astfel de aparat este dată de frecvența relativă de apariție a unui aparat defect (D), $f_n(D) = 0,002 = 0,2\%$.

• Rezultatele unei probe de evaluare la matematică obținute de elevii unei clase cu 31 de elevi sunt:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	1	1	4	6	8	6	3	2

Populația statistică este mulțimea elevilor din clasă, unitățile statistice sunt elevii clasei, volumul populației statistice este 31 (numărul elevilor clasei), iar caracteristica este nota la test. Seria statistică (formată din perechile (notă, numărul elevilor)) este: (3, 1), (4, 1), (5, 4), (6, 6), (7, 8), (8, 6), (9, 3), (10, 2). Rezultatelor testului sunt reprezentate prin graficul cu bare din dreapta.

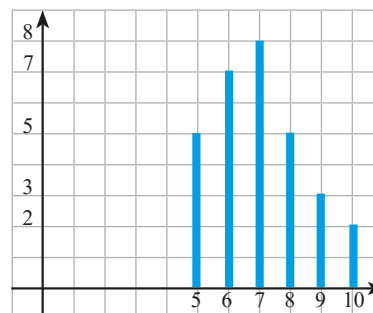


■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile: a) Frecvența relativă a evenimentului A este b) Statistica matematică se ocupă cu ... c) Statistica descriptivă ... d) Populația statistică ...
- Copiați și completați: a) Unitatea statistică sau individ ... b) Volumul populației statistice ... c) Tipurile de caracteristici ... d) După valorile pe care le au caracteristicile sunt: ...
- Aruncând un zar de 60 de ori s-au înregistrat rezultatele:
Aflați frecvența relativă de realizare a fiecărui eveniment.
- Identificați în exercițiul anterior: populația statistică; volumul populației statistice; unitățile statistice; caracteristica.
- Aflați frecvența relativă de apariție a unui produs cu defecte de fabricație, dacă:
 - din 2 000 de produse 5 sunt defecte;
 - din 1 000 de produse 12 sunt defecte;
 - din 500 de produse 3 sunt defecte;
 - din 3 000 de produse 24 sunt defecte.
- În fiecare dintre situațiile descrise la Exercițiul 5, identificați: populația statistică, unitățile statistice, volumul populației statistice, caracteristica.
- Înainte de alegerile locale, într-un oraș s-a făcut un sondaj de opinie la care au participat 5 000 de persoane. Identificați:
 - populația statistică;
 - volumul populației statistice;
 - indivizii populației statistice;
 - caracteristica.
- Cei 28 de elevi ai unei clase au fost măsurați în înălțime și cântăriți. Identificați:
 - populația statistică;
 - volumul populației statistice;
 - indivizii populației statistice;
 - caracteristica.
- La sfârșitul anului școlar, pentru fiecare elev al unei școli de 628 de elevi se calculează media anuală. Identificați: a) populația statistică; b) volumul populației statistice; c) indivizii populației statistice; d) caracteristica.
- Rezultatele unei probe de evaluare la matematică obținute de elevii unei clase cu 27 de elevi sunt:
Identificați: a) populația statistică; b) volumul populației statistice; c) indivizii populației statistice; d) caracteristica.
- Completați seria statistică și construiți graficul cu bare al rezultatelor din exercițiul anterior.
- Rezultatele unei probe de evaluare ale unei clase de elevi sunt reprezentate grafic.
Identificați: a) populația statistică; b) volumul populației statistice; c) indivizii populației statistice; d) caracteristica.
- Înregistrați rezultatele aruncării unui zar de 120 de ori.
 - Aflați frecvențele relative de realizare ale fiecărui eveniment.
 - Construiți graficul cu bare al seriei statistice pe care o obțineți.
- Aflați de la colegii voștri câți dintre ei folosesc mijloace de transport pentru a ajunge la școală. Reprezentați grafic rezultatele în procente.
- Puneți într-o cutie 3 bile albe și 5 bile negre. Executați 50 de extrageri și înregistrați rezultatele. Calculați frecvența relativă și reprezentați grafic rezultatele.

Fața	1	2	3	4	5	6
Apariții	12	8	9	11	8	12

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	2	4	4	6	8	2	1



Sinteză

- Într-o urnă sunt bile numerotate diferit de la 1 până la 37. Se extrage o bilă din urnă. Aflați probabilitatea ca numărul de pe bilă:
 - să se dividă cu 3;
 - să se dividă cu 4;
 - să se dividă cu 5;
 - să se dividă cu 6.
- Într-o urnă sunt 38 de bile numerotate de la 1 până la 38. Se extrage o bilă din urnă. Aflați probabilitatea ca bila extrasă să aibă numărul:
 - mai mic decât 13;
 - cuprins între 12 și 25;
 - cuprins între 18 și 25;
 - mai mare decât 24.
- Confecționați cărți de joc pe care înscrieți numerele de la 1 până la 85. Amestecați pachetul și extrageți o carte. Aflați probabilitatea ca pe ea să fie:
 - o putere cu exponent natural a lui 2;
 - o putere cu exponent natural a lui 3;
 - o putere cu exponent natural a lui 4;
 - o putere cu exponent natural a lui 5.
- Confecționați cărți de joc pe care înscrieți numerele de la 1 până la 90. Aflați probabilitatea ca pe cartea extrasă să fie:
 - rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[1, 300]$;
 - rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[400, 1\ 500]$;
 - rădăcina pătrată a unui număr din intervalul $[2\ 000, 7\ 000]$.
- Într-o urnă sunt 7 bile albe, 9 bile negre, 3 bile roșii, 9 bile verzi, 7 bile maro și 2 bile albastre. Aflați probabilitatea de extragere:
 - a unei bile albe;
 - a unei bile negre;
 - a unei bile roșii;
 - a unei bile care nu este albastră.
- Se aruncă patru zaruri de culori diferite. Aflați probabilitatea ca suma numerelor care apar să fie egală:
 - cu 6;
 - cu 9;
 - cu 14;
 - cu 17;
 - cu 25;
 - cu 28.
- Într-o urnă sunt 9 bile albe și un număr de bile negre. Aflați:
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{9}{22}$ și câte bile negre sunt în urnă;
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{9}{31}$ și câte bile negre sunt în urnă.
- Într-o urnă sunt 7 bile albe și un număr de bile negre. Aflați:
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{7}{22}$ și câte bile negre sunt în urnă;
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{7}{31}$ și câte bile negre sunt în urnă.
- Într-o urnă sunt 9 bile albe și un număr de bile negre. Aflați:
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{3}{5}$ și câte bile negre sunt în urnă;
 - probabilitatea ca la o extragere să apară o bilă neagră, dacă probabilitatea ca să apară o bilă albă este $\frac{1}{3}$ și câte bile negre sunt în urnă.
- Se aruncă un zar de 20 și se înregistrează rezultatele în perechi de numere (numărul, numărul de apariții): (1, 6), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 2), (6, 3). Construiți un grafic cu bare pentru rezultatele înregistrate.

Evaluare

I

1. Untr-o urnă sunt jetoane numerotate 1, 2, 3. Enumerați evenimentele la extragerea unui jeton. 10
2. Untr-o urnă se află o bilă albă și două bile negre. Aflați numărul cazurilor: a) egal posibil; b) favorabile extragerii unei bile negre. 20
3. Un primar a inițiat un sondaj de opinie privind activitatea primăriei la care au participat 1000 de persoane. Identificați: 10
 - a) populația statistică;
 - b) volumul populației statistice.
4. Untr-o urnă sunt 3 bile albe și 7 bile roșii. Aflați probabilitatea de a extrage o bilă: 10
 - a) albă; b) roșie.
5. Untr-o urnă se află o bilă albă și una roșie. Din 150 de extrageri de 78 de ori a apărut bila albă. Aflați frecvența relativă de extragere a bilei roșii. 10
6. Untr-o urnă sunt 4 bile albe, 9 bile negre și 6 bile roșii. Aflați probabilitățile de extragere a unei bile de fiecare culoare. 10
7. La o probă de evaluare elevii au obținut rezultatele: (4, 2), (5, 4), (6, 7), (7, 6), (8, 7), (9, 4), (10, 2). Construiți graficul cu bare. 10
8. Untr-o urnă sunt bile numerotate cu toate numerele naturale începând cu 30 și terminând cu 170. Aflați probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr prim. 10
9. Untr-o urnă sunt bile numerotate cu toate numerele naturale începând cu 50 și terminând cu 150. Aflați probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr al cărui pătrat este suma pătratelor a două numere naturale. 10

II

1. Într-o urnă sunt jetoane marcate A, B, C. Enumerați evenimentele la extragerea unui jeton. 10
2. Într-o urnă se află două bile albe și o bilă galbenă. Aflați numărul cazurilor: a) egal posibil; b) favorabile extragerii unei bile galbene. 20
3. Un primar a inițiat un sondaj de opinie privind activitatea primăriei la care au participat 2000 de persoane. Identificați: 10
 - a) populația statistică;
 - b) volumul populației statistice.
4. Într-o urnă sunt 2 bile albe și 8 bile roșii. Aflați probabilitatea de a extrage o bilă: 10
 - a) albă; b) roșie.
5. Într-o urnă se află o bilă albă și una roșie. Din 150 de extrageri de 72 de ori a apărut bila albă. Aflați frecvența relativă de extragere a bilei roșii. 10
6. Într-o urnă sunt 3 bile albe, 6 bile negre și 8 bile roșii. Aflați probabilitățile de extragere a unei bile de fiecare culoare. 10
7. La o probă de evaluare elevii au obținut rezultatele: (4, 5), (5, 3), (6, 5), (7, 8), (8, 6), (9, 3), (10, 3). Construiți graficul cu bare. 10
8. Într-o urnă sunt bile numerotate cu toate numerele naturale începând cu 60 și terminând cu 200. Aflați probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr prim. 10
9. Într-o urnă sunt bile numerotate cu toate numerele naturale începând cu 30 și terminând cu 130. Aflați probabilitatea ca extrăgând o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr al cărui pătrat este suma pătratelor a două numere naturale. 10

Din istoria matematicii

A rămas cunoscut: în matematică, fizică, informatică și filosofie.

În matematică: teorema lui Pascal (intersecțiile laturilor opuse ale unui hexagon inscriptibil sunt concurente); triunghiul lui Pascal (combinatorică); cercetări legate de probabilitate.

În fizică: legea lui Pascal; pascalul este unitate de măsură pentru presiune (N/m^2).

În informatică: primul calculator mecanic. În memoria lui un limbaj de programare se numește Pascal.

Blaise Pascal a fost al treilea copil și singurul fiu al lui Étienne Pascal, un avocat preocupat de matematică. La 3 ani a rămas fără mamă. De educația copiilor s-a ocupat tatăl lor.

Nu a urmat nicio școală și nicio universitate. Cu toate acestea despre el se spune că a fost un matematician, un fizician și un filosof. Și a trăit numai 39 de ani!



Blaise Pascal
(1623–1662)

3. Elemente de calcul financiar

■ Exerciții rezolvate

- 1) La o bancă se deschid depozite cu dobânda anuală de 12%. În fiecare lună dobânda se descarcă la un cont de card. Un client a deschis la această bancă un depozit cu 100 000 lei. Aflați ce sumă de bani primește în fiecare lună clientul pe card.

Rezolvare. $12 : 12 = 1$. Deoarece dobânda anuală este de 12%, dobânda pe lună este de 1%. În fiecare lună clientul primește 1% din 100 000 lei. $0,01 \cdot 100\,000 = 1\,000$. **Răspuns:** 1 000 lei.

- 2) La o bancă se deschid depozite cu dobânda anuală de 12% cu capitalizare (dobândă compusă). Un client a deschis la această bancă un depozit cu 100 000 lei. Aflați ce sumă de bani se află în depozitul clientului: a) după o lună; b) după 2 luni.

Rezolvare. $12 : 12 = 1$. Deoarece dobânda anuală este de 12%, dobânda pe lună este de 1%.

a) $0,01 \cdot 100\,000 = 1\,000$; $1\,000 + 100\,000 = 101\,000$. După o lună în depozitul clientului se află 101 000 lei. **Răspuns:** 101 000 lei. b) $0,01 \cdot 101\,000 = 1\,010$; $1\,010 + 101\,000 = 102\,010$. După 2 luni în depozitul clientului se află 102 010 lei. **Răspuns:** 102 010 lei.

- 3) La o bancă se dau credite cu dobânda anuală de 24%. Un client ia de la această bancă un credit de 100 000 lei pentru un an. Aflați cât plătește clientul băncii, la expirarea contractului.

Rezolvare. $0,24 \cdot 100\,000 = 24\,000$; $100\,000 + 24\,000 = 124\,000$. După 1 an clientul trebuie să plătească datoria de 100 000 lei și dobânda de 24 000 lei. **Răspuns:** 124 000 lei.

Băncile oferă multe servicii clienților. Ne ocupăm aici numai de două astfel de servicii: depozitele și creditele. Depozitele permite unei bănci să *acumuleze* sume mari de bani. Acești bani banca îi folosește, printre altele, la oferirea de credite. Din creditarea clienților (cetățeni sau firme) banca înmulțește banii pe care i-a acumulat din depozite.

Clienții deschid depozite la bancă pentru a obține un profit. **Dobânda** de $p\%$ pentru un depozit, măsoară în procente sau în bani, cât primește clientul, în plus, pentru suma de bani pe care a lăsat-o la bancă, după expirarea contractului.

Dobânda simplă fixă de $p\%$ (pe an) din suma de bani s . La încheierea contractului clientul primește suma de bani (în valuta precizată în contract) $s_1 = s(100 + p)\%$. De obicei, profitul se plătește la card, eșalonat, în fiecare lună.

Dobânda simplă compusă fixă de $p\%$ (pe an). Fie $q = p : 12$ și s suma de bani depusă de un client. După prima lună suma de bani din contul clientului devine $s_1 = s(100 + q)\%$. După luna a doua suma de bani din contul clientului devine $s_2 = s_1(100 + q)\% = s((100 + q)\%)^2$. După luna a n -a suma de bani din contul clientului devine $s_n = s((100 + q)\%)^{n-1}$.

Băncile oferă și alte tipuri de dobânzi.

■ Exerciții rezolvate

- 1) Un client a cumpărat produse alimentare dintr-un magazin și a plătit 318 lei. Pe bonul de casă scria 318 lei inclusiv TVA 20%. Câți lei constituie TVA?

Rezolvare. Se rezolvă proporția $\frac{318}{x} = \frac{120}{20}$. $x = 318 \cdot 20 : 120 = 53$. **Răspuns:** 53 lei.

- 2) Un frigider costă 8 520 lei fără TVA și TVA-ul constituie 15% din cost. Cât plătește o firmă care cumpără 3 astfel de frigidere?

Rezolvare. $0,15 \cdot 8\,520 = 1\,278$; $8\,520 + 1\,278 = 9\,798$; $3 \cdot 9\,798 = 29\,394$. TVA-ul pentru un frigider este 1 278 lei, prețul unui frigider este 9 798 lei și costul a 3 astfel de frigidere este 29 394 lei.

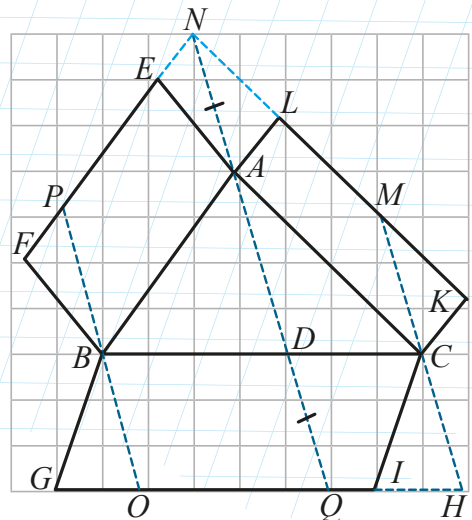
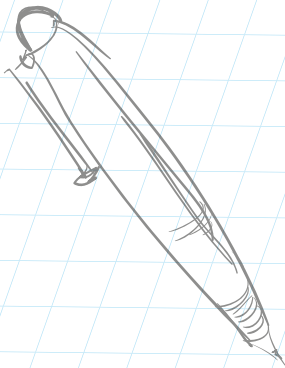
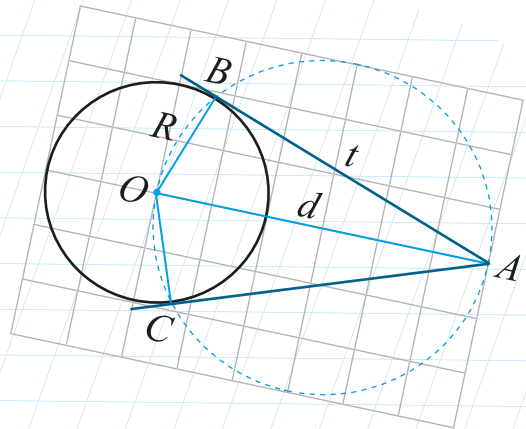
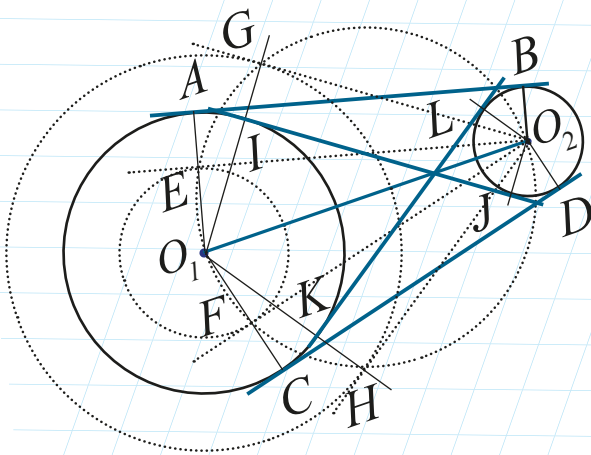
TVA vine de la Taxa pe Valoare Adăugată și este, de fapt, un impozit pe consum, suportat de către consumatorul final al unui bun sau serviciu. TVA se exprimă în procente din suma care trebuie achitată de consumator. Produsele se împart în categoriile A și B. Pentru cele de categoria A TVA constituie 20% din costul produselor, iar pentru produsele de categoria B TVA constituie 8%.

Bugetul constă în evidența veniturilor și repartizarea lor pe categorii de cheltuieli dintr-o anumită perioadă ale unui stat, organizații, familii.

■ Exerciții

- O bancă oferă clienților depozite cu dobânda (simplă) fixă de 9%. Un client deschide un astfel de depozit. Cât primește clientul după închiderea depozitului, dacă:
 - el depune la bancă 60 000 lei pe un termen de 1 an;
 - el depune la bancă 75 000 lei pe un termen de 2 ani;
 - el depune la bancă 48 000 lei pe un termen de 3 ani;
 - el depune la bancă 54 000 lei pe un termen de 4 ani.
- O bancă oferă clienților depozite cu dobânda (simplă) fixă de $p\%$. Un client deschide un astfel de depozit. Aflați p , dacă el a depus la bancă:
 - 50 000 lei pe un termen de 1 an și a primit după închiderea depozitului 54 000 lei;
 - 72 000 lei pe un termen de 2 ani și a primit după închiderea depozitului 86 400 lei;
 - 82 000 lei pe un termen de 3 ani și a primit după închiderea depozitului 107 880 lei;
 - 45 000 lei pe un termen de 4 ani și a primit după închiderea depozitului 54 000 lei.
- O bancă oferă clienților credite cu dobânda fixă de 18%. Un client ia un credit de la această bancă. Cât plătește clientul băncii la expirarea termenului, dacă:
 - el împrumută de la bancă 64 000 lei pe un termen de 1 an;
 - el împrumută de la bancă 78 000 lei pe un termen de 2 ani;
 - el împrumută de la bancă 85 000 lei pe un termen de 3 ani;
 - el împrumută de la bancă 96 000 lei pe un termen de 4 ani.
- O bancă oferă clienților credite cu dobânda fixă de $p\%$. Un client ia un credit de la această bancă. Aflați dobânda în procente, p , dacă:
 - el împrumută de la bancă 75 000 lei și va plăti băncii peste un an 90 000 lei;
 - el împrumută de la bancă 110 000 lei și va plăti băncii peste 2 ani 145 200 lei;
 - el împrumută de la bancă 125 000 lei și va plăti băncii peste 3 ani 181 250 lei;
 - el împrumută de la bancă 160 000 lei și va plăti băncii peste 4 ani 236 800 lei;
- TVA-ul pentru aparatele electrice este de 18% din costul aparatelor cumpărate. Aflați cât constituie TVA-ul la cumpărarea:
 - unui televizor pentru care se plătește 14 560 lei;
 - unui laptop și un frigider pentru care se plătește în total 25 340 lei;
 - unei mașini automate de spălat și un frigider pentru care se plătește în total 28 480 lei;
 - a două laptopuri pentru se plătește în total 31 240 lei.
- TVA-ul pentru cumpărăturile dintr-un magazin este de $p\%$ din costul cumpărăturii. Aflați p , dacă:
 - pentru o cumpărătură s-a achitat 4 210 lei din care TVA-ul constituie 735 lei;
 - pentru o cumpărătură s-a achitat 2 751,84 lei din care TVA-ul constituie 203,84 lei;
 - pentru o cumpărătură s-a achitat 5 943 lei din care TVA-ul constituie 990,5 lei;
 - pentru o cumpărătură s-a achitat 8 127 lei din care TVA-ul constituie 602 lei.
- La o bancă se deschid depozite cu dobânda anuală de 9% cu capitalizare (dobândă compusă). Un client a deschis la această bancă un depozit cu 84 000 lei. Aflați ce sumă de bani se află în depozitul clientului: a) după o lună; b) după 2 luni.
- La o bancă se deschid depozite cu dobânda anuală de 6% cu capitalizare (dobândă compusă). Un client a deschis la această bancă un depozit cu 120 000 lei. Aflați ce sumă de bani se află în depozitul clientului: a) după o lună; b) după 2 luni.
- Un student a cumpărat un laptop cu prețul de 16 800 lei. Pentru aceasta a încheiat cu magazinul un contract de creditare și a plătit 1 652 lei în fiecare lună, timp de 12 luni. Aflați cu ce dobândă a luat studentul creditul.

GEOMETRIE



Recapitulare și completări

1. Cercul. Discul. Elemente

• **Cercul** de centru O și rază R este mulțimea tuturor punctelor planului aflate la distanța R de centrul O .

Notăție: $\mathcal{C}(O, R)$ este cercul de centru O și rază R .

• Elementele unui cerc sunt: centrul, raza.

• **Interiorul** $\mathcal{C}(O, R)$ este:

$\text{Int } \mathcal{C}(O, R) = \{M \in \text{planului} \mid OM < R\}$.

• **Exteriorul** $\mathcal{C}(O, R)$ este:

$\text{Ext } \mathcal{C}(O, R) = \{M \in \text{planului} \mid OM > R\}$.

• Două cercuri care au razele egale sunt, prin definiție, **congruente**.

• **Discul (circular) de centru O și rază R** este:

$\mathcal{D}(O, R) = \{M \text{ aparține planului} \mid OM \leq R\}$.

• **Coardă** a unui cerc este un segment determinat de două puncte ale cercului.

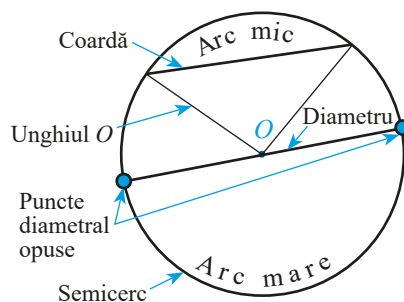
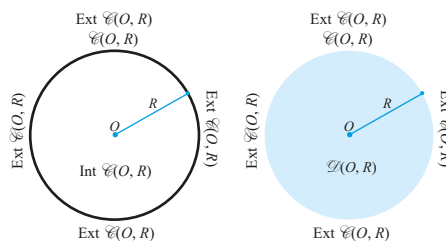
• **Diametru** al unui cerc este o coardă care conține centrul cercului. Diametrele cercului de rază R au lungimea $2R$.

• Capetele unui diametru sunt, prin definiție, **puncte diametral opuse**.

• **Arc mic** al unui cerc este intersecția cercului cu interiorul unui unghi cu vârful în centrul cercului.

• **Arc mare** al unui cerc este intersecția cercului cu exteriorul unui unghi cu vârful în centrul cercului.

• Un arc al unui cerc cu capetele puncte diametral opuse este, prin definiție, un **semicerc**.



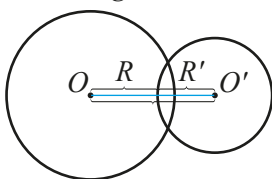
Pozițiile relative a două cercuri

• Două cercuri sunt **exterioare**, dacă ele nu au puncte comune și interioarele lor nu au puncte comune.

Teorema cercurilor exterioare. Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt exterioare dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este mai mare decât suma razelor cercurilor, adică $OO' > R + R'$.

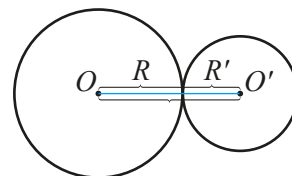
• Două cercuri sunt **tangente exterioare**, dacă ele au un singur punct comun și interioarele lor nu au puncte comune.

Teorema cercurilor tangente exterioare. Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt tangente exterioare dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este egală cu suma razelor cercurilor, adică $OO' = R + R'$.



• Două cercuri sunt **secante**, dacă ele au două puncte comune.

Teorema cercurilor secante. Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt secante dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este mai mică decât suma razelor cercurilor, adică $OO' < R + R'$.



• Două cercuri sunt **tangente interioare**, dacă ele au un singur punct comun și interioarele lor au puncte comune.

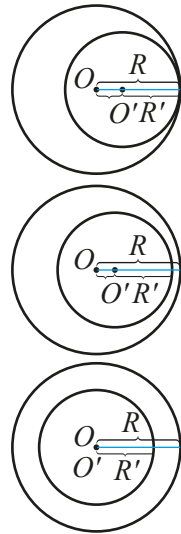
Teorema cercurilor tangente interioare. *Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt tangente interioare dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este egală cu diferența razelor cercurilor, adică $OO' = R - R'$.*

• Două cercuri sunt **interioare**, dacă ele nu au puncte și interioarele lor au puncte comune.

Teorema cercurilor interioare. *Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt interioare dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este mai mică decât diferența razelor cercurilor, adică $OO' < R - R'$.*

• Două cercuri sunt **concentrice**, dacă ele au același centru.

Teorema cercurilor concentrice. *Cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ sunt concentrice dacă și numai dacă distanța dintre centrele cercurilor este egală cu zero. $OO' = 0$.*



■ Exerciții

1. Copiați și completați propozițiile adevărate:

- a) Cercul de centru O și rază R este ...
c) Interiorul cercului de centru O și rază R ...

- b) Cercul de centru O și rază R se notează ...
d) Exteriorul cercului de centru O și rază R ...

2. Construiți cu ajutorul compasului:

- a) un cerc de centru O și rază 34 mm;
c) un cerc de centru O și rază 43 mm;

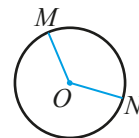
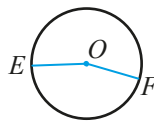
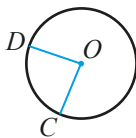
- b) un cerc de centru O și rază 28 mm;
d) un cerc de centru O și rază 48 mm.

3. Copiați și completați propozițiile adevărate:

- a) Coardă a unui cerc este ...; b) Diametru al unui cerc este ... c) Puncte diametral opuse ...
d) Arc mic al unui cerc ... e) Arc mare al unui cerc ... f) Semicerc este ...

4. Recunoașteți:

- a) Arcul mic și arcul mare DC ; b) Arcul mic și arcul mare EF ; c) Arcul mic și arcul mare MN .



5. Reprezentați două cercuri:

- a) tangente exterioare; b) exterioare; c) tangente interioare; d) secante.

6. Fie cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$. Completați în fiecare situație relațiile dintre R, R' și OO' :

- a) b) c) d)

7. Fie cercurile $\mathcal{C}(O; 6,7 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 3,5 \text{ cm})$. Precizați proprietatea distanței dintre centrele cercurilor, dacă:

- a) cercurile sunt tangente exterioare; b) cercurile sunt exterioare;
c) cercurile sunt secante; d) cercurile sunt tangente interioare.

8. Aflați distanța dintre centrele cercurilor:

- a) tangente exterioare $\mathcal{C}(O; 16,4 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 39,2 \text{ cm})$; b) tangente exterioare $\mathcal{C}(O; 17,3 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 74,2 \text{ cm})$; c) tangente exterioare $\mathcal{C}(O; 73,8 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 59,6 \text{ cm})$; d) tangente exterioare $\mathcal{C}(O; 59,5 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 94,7 \text{ cm})$.

9. Aflați distanța dintre centrele cercurilor: a) tangente interioare $\mathcal{C}(O; 94,5 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 125 \text{ mm})$;

- b) tangente interioare $\mathcal{C}(O; 78,4 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 164 \text{ mm})$;
c) tangente interioare $\mathcal{C}(O; 85,7 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 133 \text{ mm})$;
d) tangente interioare $\mathcal{C}(O; 99,6 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}(O; 241 \text{ cm})$.

2. Unghiuri

- Arcul AB (notat $\widehat{AB}$ sau $\smile AB$) este **arc mic**. Arcul ACB este **arc mare**.

Arcul corespunde unghiului AOB .

Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.

Unghiul AOB este **unghi la centru**. Arcul AB este **subîntins** de unghiul AOB . Măsură arcului AB este $m(\smile AB) = m(\angle AOB)$, măsură arcului $ACB = 360^\circ - m(\angle AOB)$.

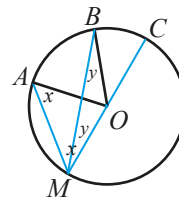
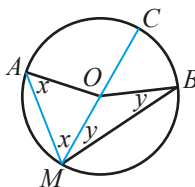
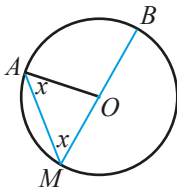
Unghi înscris

Unghiul determinat de coardele MA și MB este **unghi înscris** în cerc.

Unghiul format de două coarde cu o extremitate comună se numește **unghi înscris** în cerc.

Arcul AB este **subîntins** de unghiul înscris AMB și acesta este **înscriș** în arcul AMB .

Teorema unghiului înscris. Măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului subîntins de el. $m(\angle AMB) = \frac{m(\smile AB)}{2}$.



Demonstrație (facultativ). Fie cazul: $[MB]$ – diametru al cercului. Toate situațiile sunt ilustrate mai sus.

Triunghiul isoscel AOM are unghiurile alăturate bazei de măsură x . Unghiul exterior AOB are măsură $2x = m(\smile AB)$. Rezultă că măsură unghiului înscris AMB este egală cu jumătate din măsură arcului mic $AB = 0,5 \cdot m(\smile AB)$.

Analizând celelalte două cazuri, se ajunge la aceeași concluzie: măsură unghiului înscris AMB este egală cu jumătate din măsură arcului mic $AB = 0,5 \cdot m(\smile AB)$.

Corolar. 1) Un semicerc are 180° .

2) Dacă un arc mic are n° , atunci arcul mare corespunzător lui are $m^\circ = 360^\circ - n^\circ$.

3) Un unghi este drept dacă și numai dacă este înscris într-un semicerc.

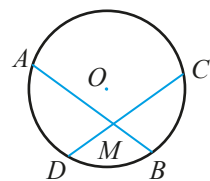
4) Un triunghi este dreptunghic dacă și numai dacă este înscris într-un semicerc.

Unghi cu vârful în interiorul unui cerc (Facultativ)

Unghiurile formate de coardele AB și CD concurente în M (diferit de centrul cercului) sunt, prin definiție, **unghiuri cu vârful în interiorul cercului**.

Teorema unghiului cu vârful în interiorul cercului. Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este egală cu semisuma (jumătate din suma) măsurilor arcelor cuprinse între laturile a două unghiuri opuse la vârf.

$$m(\angle AMC) = m(\angle BMD) = \frac{m(\smile AC) + m(\smile BD)}{2}; \quad m(\angle AMD) = m(\angle BMC) = \frac{m(\smile AD) + m(\smile BC)}{2}.$$

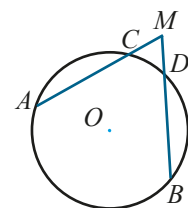


Unghi cu vârful în exteriorul unui cerc (Facultativ)

Unghiurile formate de coardele AB și CD concurente în M (diferit de centrul cercului) sunt, prin definiție, **unghiuri cu vârful în exteriorul cercului**.

Teorema unghiului cu vârful în exteriorul cercului. Măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu semidiferența (jumătate din diferența) măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

$$m(\angle AMB) = \frac{m(\smile AB) - m(\smile CD)}{2}.$$



■ Exerciții

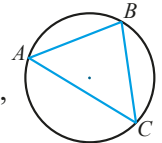
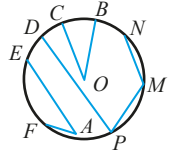
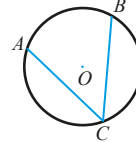
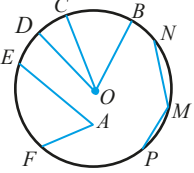
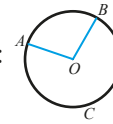
- Fie situația ilustrată în desen. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Unghiul AOB este ...
 - Arcul subîntins de unghiul AOB este ...
 - Măsura arcului AB este ...
 - Măsura arcului ACB este ...
- Recunoașteți unghiurile la centru ilustrate în desen.
- Construiți cu compasul și rigla unghiul la centru AOB de măsură:
 - 60° ; b) 30° ; c) 15° ; d) 45° ; e) 75° ; f) 105° ; g) 120° ; h) 165° .
- Aflați măsura arcului mic ce se obține marcând cu ajutorul compasului:
 - o coardă de lungime egală cu raza;
 - de două ori o coardă de lungime egală cu raza;
 - de trei ori o coardă de lungime egală cu raza;
 - de patru ori o coardă de lungime egală cu raza.
- Fie situația ilustrată în desen. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Unghiul ACB este ...
 - Arcul subîntins de unghiul ACB este ...
 - Unghiul înscris într-un semicerc este ...
- Recunoașteți unghiurile înscrise ilustrate în desen.
- Construiți cu compasul și rigla unghiul înscris AMB de măsură:
 - 60° ; b) 30° ; c) 15° ; d) 45° ; e) 75° ; f) 105° ; g) 120° ; h) 165° .
- Cu ajutorul riglei și compasului construiți un arc de măsură:
 - 60° ; b) 30° ; c) 15° ; d) 45° ; e) 75° ; f) 105° ; g) 120° ; h) 165° .
- Aflați măsura arcului mare ce se obține marcând cu ajutorul compasului:
 - o coardă de lungime egală cu raza;
 - de două ori o coardă de lungime egală cu raza;
 - de trei ori o coardă de lungime egală cu raza.
- Fie triunghiul ABC înscris în cercul de rază R . Aflați măsurile arcelor subîntinse de unghiurile triunghiului, dacă:
 - $m(\angle A) = 67^\circ$, $m(\angle B) = 98^\circ$;
 - $m(\angle A) = 56^\circ$, $m(\angle C) = 101^\circ$;
 - $m(\angle B) = 63^\circ$, $m(\angle C) = 90^\circ$;
 - $m(\angle A) = 36^\circ$, $m(\angle C) = 75^\circ$.
- Fie triunghiul ABC înscris în cercul de rază R . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului, dacă măsurile arcelor subîntinse sunt:

a) $m(\widehat{BC}) = 74^\circ$, $m(\widehat{AC}) = 184^\circ$;	b) $m(\widehat{BC}) = 112^\circ$, $m(\widehat{AC}) = 126^\circ$;
c) $m(\widehat{BC}) = 166^\circ$, $m(\widehat{AC}) = 188^\circ$;	d) $m(\widehat{BC}) = 138^\circ$, $m(\widehat{AC}) = 108^\circ$.
- Fie A, B, C, D puncte ale unui cerc (conciclice) în această ordine, astfel încât AC și BD sunt perpendiculare. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC , dacă:

a) $m(\angle ADB) = 35^\circ$, $m(\angle ACD) = 48^\circ$;	b) $m(\angle BDC) = 26^\circ$, $m(\angle CAD) = 54^\circ$;
c) $m(\angle ADB) = 21^\circ$, $m(\angle ACD) = 66^\circ$;	d) $m(\angle BDC) = 43^\circ$, $m(\angle CAD) = 39^\circ$.
- Fie A, B, C, D puncte ale unui cerc (conciclice) în această ordine, astfel încât AC este bisectoarea unghiului BAD . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului BCD , dacă:

a) $m(\angle BAD) = 86^\circ$;	b) $m(\angle BAD) = 86^\circ$;	c) $m(\angle BAD) = 124^\circ$;	d) $m(\angle BAD) = 142^\circ$.
---------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	----------------------------------
- Cercurile cu centrele O_1 și O_2 se intersectează în punctele A și B .
 - Aflați perimetrul patrulaterului AO_1BO_2 dacă razele cercurilor sunt de 5 cm și de 12 cm.
 - Aflați AB dacă în plus $O_1O_2 = 13$ cm.
 - Demonstrați că patrulaterul AO_1BO_2 este ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare).
- Fie A, B, C, D puncte ale unui cerc (conciclice) în această ordine, astfel încât AC este bisectoarea unghiului BAD . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului BCD , dacă:

a) $m(\angle BAD) = 86^\circ$;	b) $m(\angle BAD) = 86^\circ$;	c) $m(\angle BAD) = 124^\circ$	d) $m(\angle BAD) = 142^\circ$.
---------------------------------	---------------------------------	--------------------------------	----------------------------------
- Cercurile cu centrele O_1 și O_2 se intersectează în punctele A și B .
 - Aflați perimetrul patrulaterului AO_1BO_2 dacă razele cercurilor sunt de 5 cm și de 12 cm.
 - Aflați AB dacă în plus $O_1O_2 = 13$ cm.
 - Demonstrați că patrulaterul AO_1BO_2 este ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare).

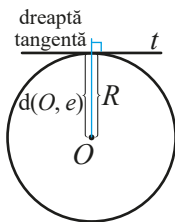


3. Pozițiile unei drepte față de un cerc

- Distanța de la un punct la o dreaptă este distanța dintre punct și proiecția lui pe dreaptă.
- O dreaptă este **exterioară** unui cerc, dacă dreapta și cercul nu au puncte comune.

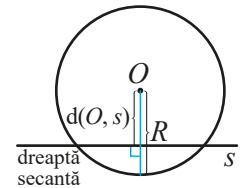
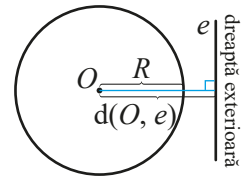
Teorema dreptei exterioare cercului. Dreapta e este **exterioară** $\mathcal{C}(O, R)$ dacă și numai dacă distanța de la O la e este mai mare decât R , adică $d(O, e) > R$.

- O dreaptă este **tangentă** cercului, dacă dreapta și cercul au un punct comun.



Teorema dreptei tangente cercului. Dreapta t este **tangentă** $\mathcal{C}(O, R)$ dacă și numai dacă distanța de la O la t este egală cu R , adică $d(O, t) = R$. Raza în punctul de tangență este perpendiculară pe tangență.

- O dreaptă este **secantă** cercului, dacă dreapta și cercul au două puncte comune.

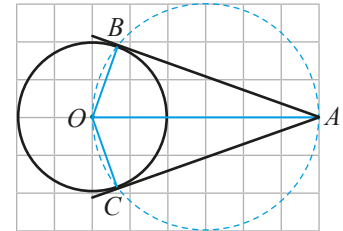


Teorema dreptei secante cercului. Dreapta s este **secantă** $\mathcal{C}(O, R)$ dacă și numai dacă distanța de la O la s este mai mică decât R , adică $d(O, s) < R$.

Tangentele dintr-un punct exterior

Teorema tangențelor dintr-un punct exterior la un cerc (a ciocului de pasăre). Tangentele din punctul A la cercul de centru O sunt congruente și $[AO]$ este bisectoarea unghiului format de ele.

Demonstrație. Conform IC, $\triangle BOA \equiv \triangle COA$. Rezultă că $[AB] \equiv [AC]$ și $\angle BAO \equiv \angle CAO$.



Construcția tangențelor dintr-un punct exterior

În desen este ilustrată construirea cu ajutorul riglei și compasului a tangențelor din A la cercul de centru O . 1) Se construiește segmentul OA . 2) Se construiește cercul de diametru OA . 3) Cercurile sunt secante în B și C . 4) Se construiesc razele OB și OC . 5) Se construiesc tangentele AB și AC . Triunghiurile OAB și OAC sunt dreptunghice congruente.

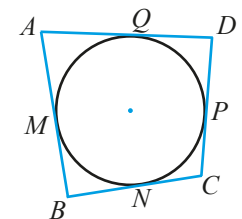
Patrulater circumscris

Un patrulater **circumscris** unui cerc are laturile tangente cercului.

În desen patrulaterul $ABCD$ are laturile tangente cercului. Aplicând teorema tangențelor, se obține: $AQ = AM = x$; $MB = BN = y$; $NC = CP = z$; $DP = DQ = t$. (*)

Conform (*), $AD + BC = x + y + z + t$ și $AB + DC = x + y + z + t$, de unde $AD + BC = AB + DC$.

Un patrulater este **circumscriptibil**, dacă se poate construi un cerc tangent laturilor patrulaterului. El are proprietățile patrulaterului circumscris.



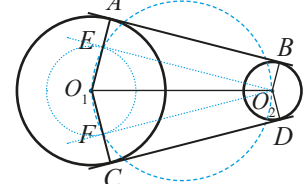
Proprietățile patrulaterului circumscris. 1) Sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale.

2) Bisectoarele patrulaterului se intersectează în centrul cercului înscris.

Tangentele comune

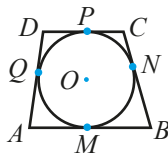
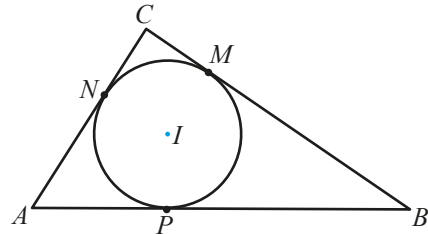
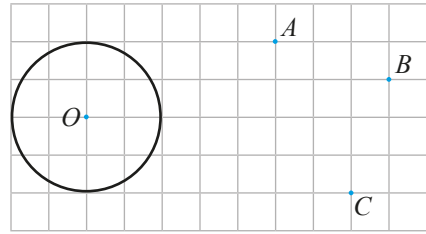
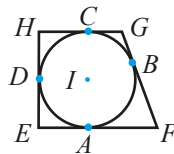
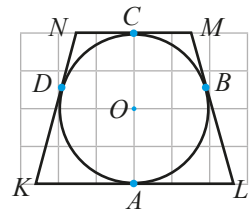
Construcția **tangențelor exterioare comune** cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ cu compasul și rigla. 1) Se construiește cercul $\mathcal{C}(O_1, r)$, $r = r_1 - r_2$. 2) Se construiește cercul $\mathcal{C}(O, O_1O_2)$. 3) Se notează cu E și F cercurile construite la pașii 1) și 2). 4) Se notează cu A și B intersecțiile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ cu EO_1 și FO_1 . 5) Se construiesc segmentele congruente EO_2 și FO_2 . 5) Din A și din B se marchează cu compasul cu deschiderea EO_2 , punctele B și D pe $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, astfel încât să se formeze dreptunghiurile AEO_2B și CFO_2D .

Dreptele AB , CD și O_1O_2 sunt concurente.

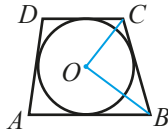
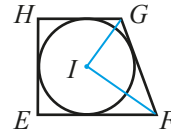


■ Exerciții

1. Reproduceți desenul și completați-l, construind cu compasul și rigla tangentele la cerc din fiecare dintre punctele: A, B, C .
2. Formulați teorema tangențelor.
3. Cercul de centru I este înscris în triunghiul ABC . Enumerați segmentele congruente.
4. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) Un patrulater circumscris unui cerc ...
 - b) Un patrulater este circumscriptibil, ...
5. Formulați:
 - a) Proprietățile patrulaterului circumscris.
 - b) Proprietățile patrulaterului circumscriptibil.
6. Fie patrulaterul $ABCD$ circumscris unui cerc. Completați:
 - a) Dacă $AB + CD = 25$ cm, atunci $AD + BC = \dots$
 - b) Dacă $AB + CD = 37$ cm, atunci $AD + BC = \dots$
7. Fie patrulaterul circumscriptibil $ABCD$. Completați:
 - a) Dacă $AB + CD = 51$ cm, atunci $AD + BC = \dots$
 - b) Dacă $AB + CD = 49$ cm, atunci $AD + BC = \dots$
8. Enumerați proprietățile trapezului circumscris:
 - a) $ABCD$;
 - b) $EFGH$;
 - c) $KLMN$.

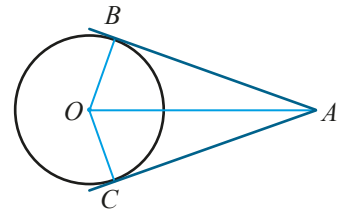

 b) $EFGH$;

 c) $KLMN$.


9. Arătați că:

 a) $ABCD$ trapez circumscris implică $m(\angle BOC) = 90^\circ$;

 b) $EFGH$ trapez circumscris implică $m(\angle FIG) = 90^\circ$.


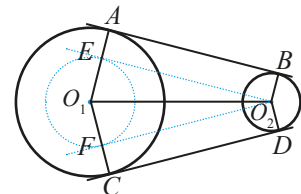
10. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul A exterior cercului. Calculați lungimile tangențelor AB și AC din punctul A la $\mathcal{C}(O, r)$. Completați casele libere din:

OA (cm)			25			37		65	
OB (cm)	12	8		9		12	13		21
OC (cm)			7		11			16	
AB (cm)		15			60				20
AC (cm)	5			40			84		



11. Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, AB și CD sunt tangentele exterioare comune ale cercurilor. Completați casele libere din tabelul:

r_2 (cm)	5	7	3	4	8	2	3	5	7
r_1 (cm)		62		40	41			21	
AB (cm)			80		56		21		
O_1O_2 (cm)	97		89			53	29		85
CD (cm)	72	73		77		45		63	84



12. Fie cercurile tangente exterioare $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în punctul M și tangenta comună AB .
 - a) Aflați AB , dacă $r_1 = 45$ cm și $r_2 = 20$ cm.
 - b) Aflați măsura unghiului AMB .

4. Arce și coarde

- Fie $\mathcal{C}(O, r)$, coarda AB și diametrul DE este perpendicular pe AB în C . Se compară: segmentele AC și BC ; arcele AD și BD ; arcele AE și BE .

Teorema diametrului perpendicular pe o coardă. *Un diametru este perpendicular dacă și numai dacă conține mijlocul coardei.*

Demonstrația se bazează pe proprietatea medianei triunghiului isoscel.

Corolar. *Diametrul perpendicular pe o coardă conține mijlocul coardei și mijloacele arcelor determinate de această coardă.*

$$[AC] \equiv [BC], \smile AC \equiv \smile BC, \smile AE \equiv \smile BE.$$

- În desen $[AB] \equiv [CD]$. Prin măsurare se constată că ele se află la distanțe egale depărtate de centru, $[OE] \equiv [OF]$.

Teorema coardelor egal depărtate de centrul cercului. *Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.*

Demonstrație. Conform IC rezultă că $\triangle EOA \equiv \triangle FOC$, de unde $[OE] \equiv [OF]$.

Reciproc, $[OE] \equiv [OF]$ implică (conform IC) $\triangle EOA \equiv \triangle FOC$, de unde $[AE] \equiv [CF]$.

- Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și punctele cercului A, B, C, D astfel încât $AB \parallel CD$. Comparați lungimile coardelor BC și AD .

Teorema coardelor paralele. *Dacă coardele unui cerc AB și CD sunt paralele, atunci $BC = AD$.*

Demonstrație. Fie diametrul EF perpendicular pe AB , (1). Se aplică teoremele: a drepte perpendiculare pe una dintre două drepte paralele, (2); a diametrului perpendicular pe o coardă, (3); a arcelor congruente și a coardelor corespunzătoare, (4). Aplicând, pe rând, (2) și (3) implică: $\smile AE \equiv \smile BE$ și $\smile EC \equiv \smile ED$, (5). Conform (4), (5) implică: $[BC] \equiv [AD]$.

Patrulare înscrise. Patrulare înscriptibile

Un patrulater cu vârfurile conciclice se numește **patrulater înscris**.

Un patrulater este **înscriptibil**, dacă se poate construi un cerc care conține vârfurile patrulaterului.

Teorema patrulaterului înscris. 1) *Unghiurile opuse ale unui patrulater înscris sunt suplementare.* 2) *Unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.*

Teoremă patrulaterului circumscris. *Un patrulater este înscriptibil dacă și numai dacă are proprietățile patrulaterului înscris.*

Corolar. Un trapez isoscel este înscriptibil

Poligoane regulate

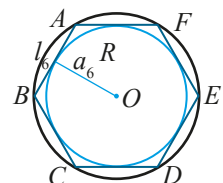
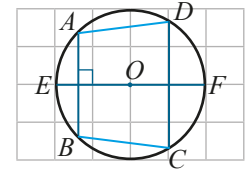
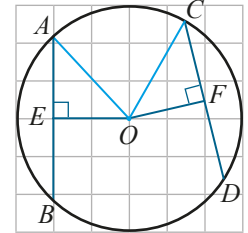
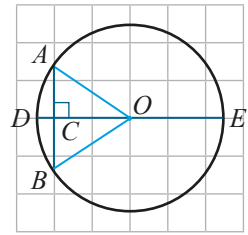
Un **poligon regulat** are laturile congruente și unghiurile congruente.

Un poligon regulat este **înscriptibil** și **circumscriptibil**. Raza cercului înscris într-un poligon regulat este **apotema** poligonului regulat. Notății: l_n (lungimea laturii), a_n (apotema).

Triunghiul echilateral. 1) Fie R raza cercului circumscris. *Lungimile laturilor triunghiului echilateral sunt $l_3 = R\sqrt{3}$.* 2) *Apotema triunghiului echilateral este $a_3 = 0,5R$.*

Pătratul. 1) *Lungimile laturilor pătratului înscris în cercul de rază R sunt $l_4 = R\sqrt{2}$.* 2) *Apotema pătratului este $a_4 = 0,5R\sqrt{2}$.*

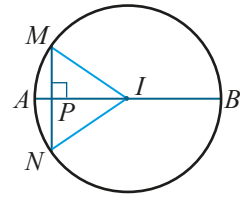
Hexagonul regulat. 1) *Lungimile laturilor hexagonului regulat sunt egale cu raza cercului circumscris hexagonului ($l_6 = R$).* 2) *Apotema hexagonului regulat este egală cu înălțimea triunghiului echilateral cu laturile de lungime R , $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.*



■ Exerciții

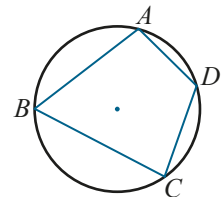
1. Scrieți teorema diametrului perpendicular pe o dreaptă.
2. Fie $\odot(I, r)$, coarda MN și diametrul AB este perpendicular pe MN în P .

r (cm)		17	25			37			
MI (cm)	13							65	
NI (cm)				41	61				29
IP (cm)		8			60	12	84	16	
MN (cm)	10		14	40			26		40



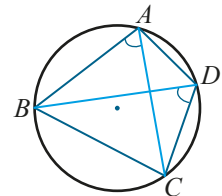
3. Scrieți teorema coardei egal depărtate de centrul cercului.
4. Scrieți teorema coardelor cuprinse între două coarde paralele.
5. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) ... se numește patrulater înscris;
 - b) Un patrulater este înscritibil ...
6. Formulați în scris:
 - a) Proprietățile patrulaterului înscris;
 - b) Proprietățile patrulaterului înscritibil.
7. Patrulaterul $ABCD$ este înscris sau înscritibil. Copiați și completați tabelul:

$m(\angle A)$			132°			111°	97°	
$m(\angle B)$	78°			77°		59°		132°
$m(\angle C)$	92°	78°		81°	64°			43°
$m(\angle D)$		103°	87°		95°		45°	



8. Patrulaterul $ABCD$ este înscris sau înscritibil. Copiați și completați tabelul:

$m(\angle BAC)$	$m(\angle DBC)$	$m(\angle ACB)$	$m(\angle A)$	$m(\angle B)$	$m(\angle C)$	$m(\angle D)$
37°	42°	63°				
26°	49°	71°				
35°	23°	82°				
52°	85°	44°				



9. Construiți într-un cerc cu raza de 5 cm, un trapez isoscel cu bazele de:
 - a) 8 cm și 5 cm;
 - b) 7 cm și 3 cm;
 - c) 2,5 cm și 9 cm.
10. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) Un poligon regulat are ...
 - b) Un poligon regulat este ...
 - c) Raza cercului înscris într-un poligon regulat este ...
11. Aflați lungimea laturii triunghiului echilateral (l_3) și apotema lui (a_3), dacă raza cercului circumscris lui este:
 - a) $R = 8$ cm;
 - b) $R = 12$ cm;
 - c) $R = 18$ cm.
12. Aflați lungimea laturii pătratului (l_4) și apotema lui (a_4), dacă raza cercului circumscris pătratului este:
 - a) $R = 5$ cm;
 - b) $R = 11$ cm;
 - c) $R = 17$ cm;
 - d) $R = 15$ m.
13. Aflați lungimea laturii hexagonului regulat (l_6) și apotema lui (a_6), dacă raza cercului circumscris lui este:
 - a) $R = 13$ cm;
 - b) $R = 24$ cm;
 - c) $R = 26$ cm;
 - d) $R = 17$ m.
14. Construiți cu rigla și compasul un hexagon regulat înscris într-un cerc cu:
 - a) $R = 2$ cm;
 - b) $R = 4$ cm;
 - c) $R = 35$ mm;
 - d) $R = 12$ m.
15. Construiți cu rigla și compasul un triunghi echilateral înscris într-un cerc cu:
 - a) $R = 25$ mm;
 - b) $R = 15$ mm;
 - c) $R = 2$ cm.
16. Construiți cu rigla și compasul un pătrat înscris într-un cerc cu:
 - a) $R = 35$ mm;
 - b) $R = 15$ mm;
 - c) $R = 2$ cm.
17. Demonstrați că:
 - a) un trapez isoscel este înscritibil;
 - b) un trapez este înscritibil dacă este isoscel;
 - c) un poligon circumscriptibil are bisectoarele concurente și reciproc.

Sinteză

1. Construiți numai cu rigla negradată centrul cercului desenat cu ajutorul:

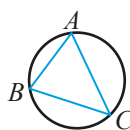
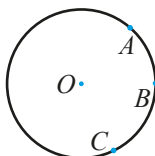
a) unui Compact Disc;

b) unui borcan rotund;

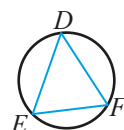
c) unui capac rotund.

2. Enumerați arcele mici și arcele mari definite de triunghiul înscris:

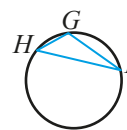
3. Reproduceți desenul și construiți numai cu ajutorul riglei tangente la cerc în punctele A, B, C .



a) ABC ;



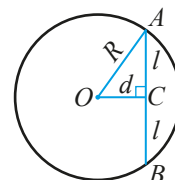
b) DEF ;



c) GHI .

4. Coarda AB este la distanța d de centrul O (O, R). Copiați și completați tabelul:

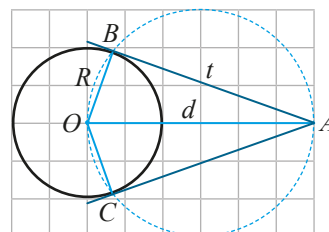
R (cm)	8	10	12	14	26	34	42
d (cm)		5			13		
l (cm)	4			7		17	
AB (cm)			12				42



5. În desen sunt reprezentate tangentele din A la O (O, R).

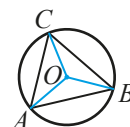
Copiați și completați tabelul:

OA (cm)		60	25		32		66	
OB (cm)	15	8		21	16	27		
OC (cm)			7		13		33	54
AB (cm)		30			24			54
AC (cm)	30			24		27		



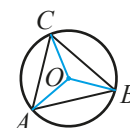
6. Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O . Copiați și completați tabelul:

$m(\angle AOB)$	$m(\angle BOC)$	$m(\angle AOC)$	$m(\angle A)$	$m(\angle C)$	$m(\angle B)$	$m(\angle A)$
78°		132°				
	146°			55°		
			21°	95°		
112°			71°			



7. Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O . Copiați și completați tabelul:

$m(\widehat{AB})$	$m(\widehat{BC})$	$m(\widehat{AC})$	$m(\angle A)$	$m(\angle B)$	$m(\angle C)$
102°		128°			
	216°			65°	
			41°	73°	
98°			55°		

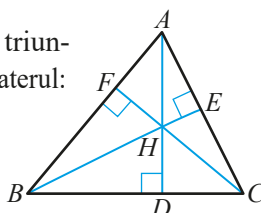


8. În desen H este ortocentrul triunghiului ABC . Arătați că patrulaterul:

a) $AEHF$ este inscriptibil;

b) $BDHF$ este inscriptibil;

c) $DCEH$ este inscriptibil.

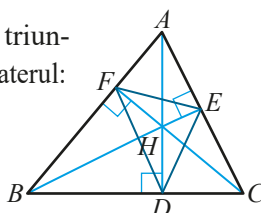


9. În desen H este ortocentrul triunghiului ABC . Arătați că patrulaterul:

a) $AFDC$ este inscriptibil;

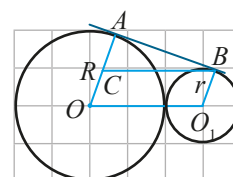
b) $FBCE$ este inscriptibil;

c) $BDEA$ este inscriptibil.



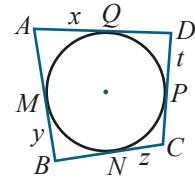
10. Cercurile din desen sunt tangente exterioare, OO_1BC este paralelogram, $AC = R - r$. Completați tabelul:

R	r	$R - r$	$R + r$	AB
8	3			
	7	5		
	4		17	

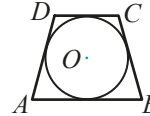


11. În desen patrulaterul $ABCD$ este circumscris cercului. Copiați și completați tabelul:

x	y	z	t	AB	BC	CD	AD
5	3	7	11				
	8	6	13	21			
12	4		17		15		
15		18		23			26



12. Trapezul isoscel $ABCD$ este circumscriptibil. Aflați raza cercului înscris în trapez, dacă bazele:
 a) $AB = 13$ și $CD = 9$; b) $AB = 15$ și $CD = 7$; c) $AB = 18$ și $CD = 12$.



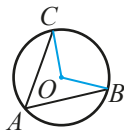
13. Aflați lungimea laturii triunghiului echilateral (l_3) și apotema lui (a_3), dacă raza cercului circumscris lui este: a) $R = 24$ cm; b) $R = 45$ cm; c) $R = 56$ cm.
 14. Aflați lungimea laturii pătratului (l_4) și apotema lui (a_4), dacă raza cercului circumscris pătratului este: a) $R = 12$ cm; b) $R = 21$ cm; c) $R = 35$ cm; d) $R = 42$ m.
 15. Aflați lungimea laturii hexagonului regulat (l_6) și apotema lui (a_6), dacă raza cercului circumscris lui este: a) $R = 72$ cm; b) $R = 64$ cm; c) $R = 81$ cm; d) $R = 108$ m.

Evaluare

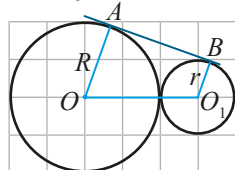
I

1. Construiți $\mathcal{C}(O, 33 \text{ mm})$ și dreapta d situată la distanța 17 mm de O . Ce poziție are dreapta d față de $\mathcal{C}(O, 33 \text{ mm})$?
 2. Construiți o dreaptă tangentă într-un punct al $\mathcal{C}(O, 40 \text{ mm})$.
 3. Construiți cu rigla și compasul tangentele din punctul M la $\mathcal{C}(O, 28 \text{ mm})$, dacă $OM = 7$ cm.
 4. Fie $\mathcal{C}(O, 41 \text{ mm})$. Aflați lungimea coardei care se află la distanța 9 mm de O .

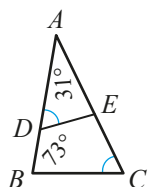
5. Aflați: a) $m(\widehat{BC})$, dacă $m(\angle BAC) = 67^\circ$;
 b) $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle BOC) = 102^\circ$.



6. Aflați lungimea tangentei AB la $\mathcal{C}(O, 36 \text{ mm})$, dacă $OA = 85$ mm.
 7. În desen cercurile sunt tangente exterioare, AB este tangenta comună. Aflați AB , dacă: $R = 3$ cm și $r = 1,7$ cm.



8. Aflați tangenta comună a cercurilor de raze 8 cm și 5 cm, dacă distanța dintre centrele lor este 14 cm.



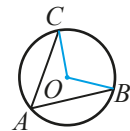
9. Studiați desenul. Aflați măsurile unghiurilor: C , BDE , CED .

II

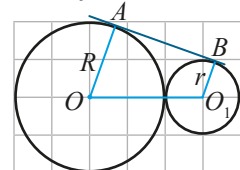
1. Construiți $\mathcal{C}(O, 37 \text{ mm})$ și dreapta d situată la distanța 19 mm de O . Ce poziție are dreapta d față de $\mathcal{C}(O, 37 \text{ mm})$?

2. Construiți o dreaptă tangentă într-un punct al $\mathcal{C}(O, 43 \text{ mm})$.
 3. Construiți cu rigla și compasul tangentele din punctul M la $\mathcal{C}(O, 32 \text{ mm})$, dacă $OM = 8$ cm.
 4. Fie $\mathcal{C}(O, 38 \text{ mm})$. Aflați lungimea coardei care se află la distanța 12 mm de O .

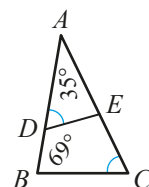
5. Aflați: a) $m(\widehat{BC})$, dacă $m(\angle BAC) = 53^\circ$;
 b) $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle BOC) = 108^\circ$.



6. Aflați lungimea tangentei AB la $\mathcal{C}(O, 42 \text{ mm})$, dacă $OA = 79$ mm.
 7. În desen cercurile sunt tangente exterioare, AB este tangenta comună. Aflați AB , dacă: $R = 3,4$ cm și $r = 2$ cm.



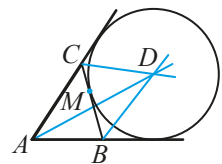
8. Aflați tangenta comună a cercurilor de raze 9 cm și 4 cm, dacă distanța dintre centrele lor este 13 cm.



9. Studiați desenul. Aflați măsurile unghiurilor: C , BDE , CED .

Suplimentar

- (Teorema puterii punctului interior)** Fie M un punct al interiorului unui cerc. Demonstrați că pentru orice coardă AB care conține punctul M , produsul lungimilor segmentelor MA și MB este constant, $AM \cdot MB = \text{constant}$.
- (Teorema puterii punctului interior. Corolar)** Fie cercul de centru O și rază r . Demonstrați că puterea punctului interior M este $p = r^2 - OM^2$.
- (Teorema punctului exterior)** Fie A un punct al exteriorului unui cerc. Demonstrați că pentru orice secantă la cerc, care conține A și intersectează cercul în B și C produsul lungimilor segmentelor AB și AC este constant, $AB \cdot AC = \text{constant}$.
- (Teorema puterii punctului exterior. Corolar)** Fie cercul de centru O și rază r . Demonstrați că puterea punctului exterior M este $p = OM^2 - r^2$.
- (Teorema lui Euler)** Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , O este centrul cercului circumscris triunghiului, r este raza cercului înscris, iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC , atunci: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.
- (Teorema lui L. Carnot)** Fie triunghiul oarecare ABC . Notăm cu D, E, F intersecțiile tangențelor în A, B, C la cercul circumscris triunghiului respectiv cu BC, AC, CA . Arătați că punctele D, E, F sunt coliniare (**dreapta lui Lemoine**).
- (Teorema lui Pascal)** Laturile opuse ale unui hexagon oarecare $ABCDEF$ înscris într-un cerc sunt concurente respectiv în M, N, P . Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.
- (Dreapta lui Simson)** Fie triunghiul ABC și M un punct cercului circumscris acestuia. Demonstrați că proiecțiile lui M pe laturile triunghiului sunt puncte coliniare.
- (Teorema lui Salmon)** Fie punctele A, B, C, M ale cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Construiți cercurile $\mathcal{C}(O_1, R_1 = 0,5 \cdot AM)$, $\mathcal{C}(O_2, R_2 = 0,5 \cdot BM)$, $\mathcal{C}(O_3, R_3 = 0,5 \cdot CM)$. Arătați că punctele lor de intersecție, cu excepția punctului M , sunt coliniare.
- (Punctul lui Gergonne)** Fie triunghiul ABC și D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris în triunghi cu laturile acestuia. Demonstrați că segmentele AD, BE, CF au un punct comun.
- Demonstrați că bisectoarele a două unghiuri exterioare unui triunghi și bisectoarea unuia dintre unghiurile triunghiului ABC sunt concurente în centrul unui **cerc exînscriș** al triunghiului, tangent unei laturi și prelungirilor celorlalte două laturi ale triunghiului.
- Se aplică proprietatea bisectoarei: punctele bisectoarei unui unghi sunt egal depărtate de laturile unghiului, (1). Bisectoarea unghiului exterior B se intersectează cu bisectoarea unghiului exterior C în punctul D , (2). (1) și (2) $\Rightarrow \text{dist}(D, AC) = \text{dist}(D, BC) = \text{dist}(D, AB) \Rightarrow \text{dist}(D, AC) = \text{dist}(D, AB)$, (3). Conform (1), (3) $\Rightarrow D$ este un punct al bisectoarei unghiului BAC , (4), (4) $\Rightarrow D$ este centrul cercului exînscriș de rază $r_a = \text{dist}(D, BC)$.
- (Punctul lui Nagel)** Un **cerc exînscriș** al unui triunghi este tangent unei laturi a triunghiului și prelungirilor celorlalte laturi ale lui. Centrul unui cerc exînscriș este intersecția unei bisectoarei a unui unghi al triunghiului cu bisectoarele bisectoarele a două unghiuri exterioare triunghiului. Fie triunghiul ABC și D, E, F punctele de tangență ale cercurilor exînscrișe ale triunghiului cu laturile acestuia. Demonstrați că segmentele AD, BE, CF au un punct comun.
- (Prima teoremă a lui Ptolemeu)** Fie patrulaterul înscris $ABCD$. Demonstrați că: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.



15. (A doua teoremă a lui Ptolemeu) Fie patrulaterul înscris $ABCD$. Demonstrați că:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}.$$

16. (Teorema cercului celor nouă puncte) Fie D, E, F sunt proiecțiile vârfurilor triunghiului ABC pe laturi; M, N, P sunt mijloacele laturilor; R, S, T sunt respectiv mijloacele segmentelor AH, BH, CH (H este ortocentrul triunghiului ABC). Demonstrați că punctele $D, E, F, M, N, P, R, S, T$ sunt conciclice.
17. (Primul punct al lui Brocard) M, N, P sunt respectiv puncte ale laturilor triunghiului ABC : BC, AC, AB . Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor APN, BMP și CMN au un punct comun.
18. (Teorema lui Țițeica) Trei cercuri congruente se intersectează în punctele A, B, C, D fiind punct comun cercurilor. Demonstrați că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cele trei cercuri.
19. Construiți un triunghi ABC cunoscând lungimea laturii BC , măsura unghiului ABC și raza r a cercului înscris în triunghi.
20. Construiți un cerc care conține două puncte date și este tangent unei drepte date, care nu conține și nu separă punctele.
21. Fie A unul dintre cele două puncte de intersecție a două cercuri secante. Construiți prin A secanta comună MN astfel încât A să fie mijlocul $[MN]$.
22. Construiți triunghiul ABC dacă sunt cunoscute: lungimea medianei din A , distanța de la A la BC și distanța de la B la AC .
23. (Teorema sinusurilor) Fie triunghiul ABC cu $AB = c, BC = a, AC = b$ și R raza cercului circumscris lui. Atunci: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
24. Construiți triunghiul ABC dacă se dau latura BC , măsura unghiului A și se știe că medianele din B și C sunt perpendiculare.
25. Construiți triunghiul ABC dacă se dau înălțimea din A , lungimea medianei din A și raza R a cercului circumscris triunghiului ABC .
26. Construiți triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC , dacă se dau $D = \text{pr}_{BC} A, [AI]$ bisectoarea din A și mijlocul M al ipotenuzei.
27. Fie pentagonul regulat $ABCDE, F$ – punctul comun al diagonalelor AD și CE . Arătați că punctul F împarte segmentul AD în medie și extremă rație (raportul segmentelor AF și FD este egal cu numărul de aur).
28. Fie M un punct al cercului circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$. Arătați că suma pătratelor distanțelor de la M până la vârfurile hexagonului este constantă.
Formulați și rezolvați o problemă asemănătoare pentru:
a) un pătrat; b) un octogon regulat; c) un decagon regulat; d) un dodecagon regulat.
29. Fie M un punct al interiorului hexagonului regulat $ABCDEF$. Arătați că suma distanțelor de la M până la laturile hexagonului este constantă. Calculați constanta.
Formulați și rezolvați o problemă asemănătoare pentru:
a) un pătrat; b) un octogon regulat; c) un decagon regulat; d) un dodecagon regulat.
30. (Teorema lui Newton) Patrulaterul $ABCD$ este circumscris unui cerc tangent laturilor patrulaterului în punctele M, N, P, Q . Atunci diagonalele patrulaterului și segmentele PM, NQ au un punct comun.
31. Fie cercurile tangente exterioare $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în punctul M . Demonstrați că secantele AC și BD construite prin M la cele două cercuri sunt diagonalele unui trapez.

1. Ariile pătratului, dreptunghiului, triunghiului

1) Pe rețeaua de pătrate este reprezentat pătratul $ABCD$. Considerând pătratele rețelei cu laturile de lungime 1, aria suprafeței mărginite de pătrat este egală cu numărul pătratelor unitate în care se descompune pătratul. $4 \cdot 4 = 16$. 16 pătrate unitate.

2) Diagonala AC descompune suprafața pătratului în două suprafețe delimitate de triunghiurile dreptunghice congruente ABC și ADC .

Aria triunghiului ABC se măsoară prin numărul de pătrate unitate în care se descompune. $4 \cdot 4 : 2 = 8$. **Răspuns:** 8 pătrate unitate.

Aria suprafeței mărginite de un pătrat se numește **aria pătratului**. Aria pătratului $ABCD$ cu laturile de lungimi a este $\mathcal{A}_{ABCD} = a^2$. Ariile se măsoară în unități de arie: milimetrul pătrat (mm^2); centimetrul pătrat (cm^2); decimetrul pătrat (dm^2); metrul pătrat (m^2); decametru pătrat (dam^2), arul (ar); hectometrul pătrat (hm^2), hectarul (ha); kilometrul pătrat (km^2).

Aria triunghiului dreptunghic isoscel ABC cu lungimile catetelor a este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

3) Pe rețeaua de pătrate este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Aria suprafeței mărginite de dreptunghi se măsoară prin numărul de pătrate unitate în care se descompune dreptunghiul. $4 \cdot 6 = 24$. **Răspuns:** 24 de pătrate unitate.

4) Diagonala AC descompune suprafața dreptunghiului în două suprafețe triunghiulare delimitate de triunghiurile dreptunghice congruente ABC și ADC . $4 \cdot 6 : 2 = 12$. Suprafața triunghiului ABC se descompune în 12 pătrate unitate.

Aria suprafeței mărginite de dreptunghi se numește **aria dreptunghiului**. Aria dreptunghiului $ABCD$ cu laturile de lungimi a și b este $\mathcal{A}_{ABCD} = ab$. Aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor dimensiunilor sale și se măsoară în unități de arie.

Aria triunghiului dreptunghic ABC având catetele de lungimi a și b este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{ab}{2}$.

5) Pe rețeaua de pătrate este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu lungimile laturilor a și b . Deoarece triunghiurile dreptunghice AED și BFC sunt congruente (conform IU), $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{EFCD}$.

Triunghiul dreptunghic BFC , are $CF = BC \sin B = b \sin B$. Rezultă că:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = ah = ab \sin B = ab \sin A = 12 \text{ pătrate.}$$

6) Diagonala AC descompune suprafața paralelogramului în două suprafețe triunghiulare delimitate de triunghiurile congruente ABC și CDA . $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5ab \sin B = 6$ pătrate.

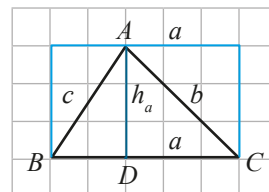
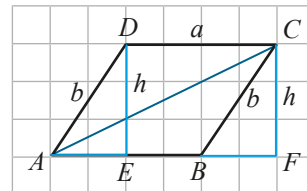
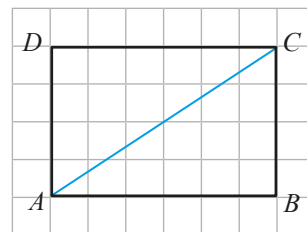
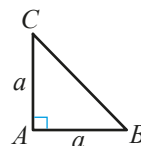
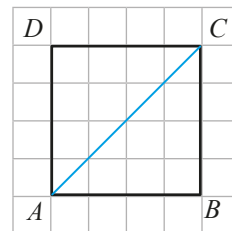
Aria paralelogramului $ABCD$ cu laturile de lungimi a , b și $d(D, AB) = h$ este $\mathcal{A}_{ABCD} = ah = ab \sin B = ab \sin A$.

Aria triunghiului ABC având $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și h_a înălțimea din A este $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5ah_a = 0,5ac \sin B$.

Figurile geometrice plane cu aceeași arie se numesc **echivalente**.

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul coeficientului lor de asemănare.

Suprafața unui pătrat este mulțimea punctelor plamului egală cu interiorul pătratului reunit cu pătratul. Aria pătratului este, prin tradiție, numită aria pătratului. La fel pentru celelalte poligoane.



■ Exerciții

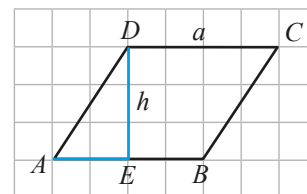
1. Copiați și completați tabelul:

Latura pătratului (cm)	17	11,1	1,8	2,4	$\sqrt{37}$	3,1	3,5	4,5	6,5	7,5
Aria pătratului (cm ²)										

2. Aflați lungimea laturii unui pătrat cu aria de:
a) 1,44 cm²; b) 8,41 cm²; c) 10,24 cm²; d) 110,25 cm²; e) 123,21 cm²; f) 112,2225 cm².
3. Aflați lungimea laturii unui pătrat cu aria de:
a) 72 dm²; b) 50 mm²; c) 512 cm²; d) 243 dm²; e) 648 mm²; f) 392 cm²; g) 125 dm².
4. Aflați aria triunghiului dreptunghic isoscel având catetele de:
a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $5\sqrt{3}$ dm; c) $4\sqrt{5}$ cm; d) $9\sqrt{7}$ mm; e) $11\sqrt{6}$ mm; f) $7\sqrt{31}$ mm.
5. Aflați lungimile catetelor triunghiului dreptunghic isoscel având aria de:
a) 12 dm²; b) 24 cm²; c) 56 mm²; d) 52 cm²; e) 64 mm²; f) 72 mm².
6. Aflați raportul ariilor a două triunghiuri dreptunghice isoscele având catetele respectiv de:
a) 9 cm și 18 cm; b) 11 cm și 22 cm; c) 3 cm și 12 cm; d) 15 cm și 60 cm.
7. Aflați coeficientul (raportul) de asemănare a două triunghiuri dreptunghice isoscele, dacă ariile lor sunt:
a) 15 cm² și 30 cm²; b) 17 cm² și 51 cm²; c) 25 cm² și 100 cm²; d) 135 cm² și 45 cm².
8. Un dreptunghi are dimensiunile a și b , perimetrul $\mathcal{P}$ și aria $\mathcal{A}$. Completați tabelul:

a	b	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
$(\sqrt{7} + \sqrt{2})$ cm	$(\sqrt{7} - \sqrt{2})$ cm		
$(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ mm	$(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ mm		
$(7\sqrt{6} + 2\sqrt{5})$ dm	$(7\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$ dm		
$(2\sqrt{43} + 3\sqrt{11})$ cm	$(2\sqrt{43} - 3\sqrt{11})$ cm		

9. Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor a și b . Aflați aria triunghiului dreptunghic cu:
a) $a = (\sqrt{7} + \sqrt{6})$ dm și $b = (\sqrt{7} - \sqrt{6})$ dm; b) $a = (5\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$ cm și $b = (5\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$ cm;
c) $a = (\sqrt{26} + \sqrt{15})$ dm și $b = (\sqrt{26} - \sqrt{15})$ dm; d) $a = (7\sqrt{6} + 3\sqrt{5})$ cm și $b = (7\sqrt{6} - 3\sqrt{5})$ cm.
10. Aflați raportul ariilor a două triunghiuri dreptunghice asemenea, dacă coeficientul lor de asemănare este:
a) 2; b) 5; c) 7; d) 4.
11. Aflați coeficientul de asemănare a două triunghiuri asemenea, dacă raportul ariilor lor este: a) 4; b) 9; c) 25; d) 16.
12. Paralelogramul $ABCD$ are o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare ei h . Aflați aria paralelogramului, dacă:
a) $a = 5$ cm și $h = 12$ cm; b) $a = 12$ cm și $h = 2$ cm;
c) $a = 14$ cm și $h = 4$ cm; d) $a = 16$ cm și $h = 7$ cm.
13. Paralelogramul $ABCD$ are laturile de lungimea a și b . Aflați aria paralelogramului, dacă:
a) $a = 12$ cm, $b = 4$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$; b) $a = 15$ cm, $b = 8$ cm și $m(\angle A) = 45^\circ$;
c) $a = 14$ cm, $b = 7$ cm și $m(\angle A) = 60^\circ$; d) $a = 18$ cm, $b = 8$ cm și $m(\angle A) = 120^\circ$.
14. Aflați aria triunghiului ABC cu $BC = a$ și h_a înălțimea din A , dacă:
a) $a = 12$ cm și $h_a = 7$ cm; b) $a = 15$ cm și $h_a = 9$ cm; c) $a = 16$ cm și $h_a = 11$ cm.
15. Aflați aria triunghiului ABC , dacă:
a) $a = 12$ cm, $b = 14$ cm, $m(\angle C) = 30^\circ$; b) $a = 9$ cm, $b = 11$ cm, $m(\angle C) = 60^\circ$;
c) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm și $m(\angle C) = 150^\circ$; d) $a = 13$ cm, $b = 8$ cm și $m(\angle C) = 135^\circ$.



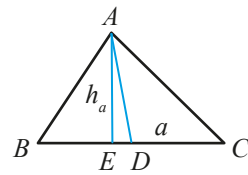
2. Triunghiuri

■ Exerciții rezolvate

- 1) Fie triunghiul ABC cu: $BC = a$; mediana AD ; înălțimea din $A = h_a = AE$. Comparați ariile triunghiurilor ABD și ADC .

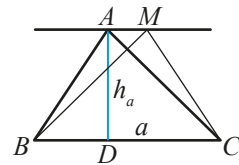
Rezolvare. Deoarece $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{0,5ah_a}{2}$ și $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{0,5ah_a}{2}$ rezultă că ariile triunghiurilor ABD și ADC sunt egale. Prin urmare, triunghiurile ABD și ADC sunt echivalente. Rezolvarea problemei este demonstrația următoarei teoreme.

Teorema medianei pentru arii. Fiecare mediană a unui triunghi descompune triunghiul în două triunghiuri echivalente.



- 2) Fie triunghiul ABC cu $BC = a$; mediana AD ; înălțimea din $A = h_a = AD$ și $AM \parallel BC$. Comparați ariile triunghiurilor ABC și MBC .

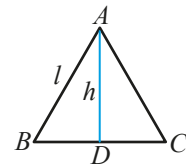
Rezolvare. Deoarece $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{ah_a}{2}$ și $\mathcal{A}_{MBC} = \frac{ah_a}{2}$ rezultă că ariile triunghiurilor ABC și MBC sunt egale. Prin urmare, triunghiurile ABD și BMC sunt echivalente. Rezolvarea problemei este demonstrația următoarei teoreme.



Teorema triunghiurilor echivalente. Fie dreptele paralele d și e . Toate triunghiurile care au una dintre laturi de lungime a conținută de una din dreptele paralele și al treilea vârf aparține celeilalte drepte sunt echivalente.

- 3) Fie triunghiul echilateral ABC cu laturile de lungime l . Calculați în funcție de l înălțimea și aria triunghiului ABC .

Rezolvare. Fie $AD = h$. Triunghiul dreptunghic ABD are $AB = l$ și $BD = 0,5l$. Teorema lui Pitagora implică: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, (*). (*) implică $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{lh}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

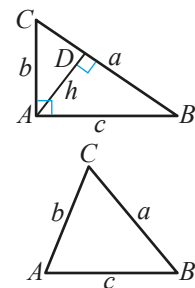


Teorema triunghiului echilateral. Fie triunghiul echilateral cu laturile de lungime l . Atunci înălțimea sa este $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și aria sa este $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Aria și înălțimea triunghiului dreptunghic. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea $AD = h$. $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{bc}{2}$, (1), și $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{ah}{2}$, (2). (1) și (2) implică $h = \frac{bc}{a}$.

Aria și înălțimea triunghiului oarecare (Formula lui Heron). Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și semiperimetrul triunghiului $p = 0,5(a + b + c)$.

Atunci: $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Poligoane regulate

1) Triunghiul echilateral înscris în cercul de rază R are $l_3 = R\sqrt{3}$ și apotema $a_3 = 0,5R$. Aria triunghiului echilateral este $\mathcal{A}_3 = 3 \cdot 0,5 \cdot l_3 a_3 = 0,75R^2\sqrt{3}$.

2) Pătratul înscris în cercul de rază R are $l_4 = R\sqrt{2}$ și apotema $a_4 = 0,5R\sqrt{2}$. Aria pătratului (romb cu diagonalele $2R$) este $\mathcal{A}_4 = 2R \cdot 2R : 2 = 2R^2$.

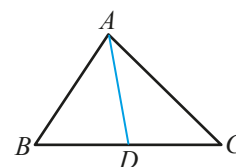
3) Hexagonul înscris în cercul de rază R are $l_6 = R$ și apotema $a_6 = 0,5R\sqrt{3}$. Aria hexagonului este $\mathcal{A}_6 = 6R \cdot 0,5R\sqrt{3} : 2 = 1,5R^2\sqrt{3}$.

Poligonul regulat	$\mathcal{A}_n$	l_n	a_n
Triunghiul echilateral	$0,75R^2\sqrt{3}$	$R\sqrt{3}$	$0,5R$
Pătratul	$2R^2$	$R\sqrt{2}$	$0,5R\sqrt{2}$
Hexagonul regulat	$1,5R^2\sqrt{3}$	R	$0,5R\sqrt{3}$

■ Exerciții

1. Copiați și completați propozițiile adevărate:
Fiecare mediană a unui triunghi descompune triunghiul ...
2. Fie triunghiul ABC și mediana AD . Copiați și completați tabelul:

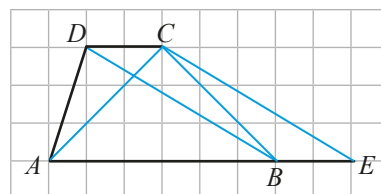
$\mathcal{A}_{ABC}$ (cm ²)			$75\sqrt{3}$			256,8	
$\mathcal{A}_{ABD}$ (cm ²)	125			$29\sqrt{7}$			98,3
$\mathcal{A}_{ADC}$ (cm ²)		34,7			$85\sqrt{3}$		



3. Formulați în scris teorema triunghiurilor echivalente.

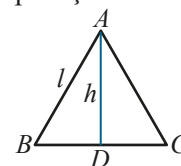
4. Reproduceți desenul de pe rețeaua de pătrate.

- a) Enumerați triunghiurile echivalente cu triunghiul ABD .
- b) Enumerați triunghiurile echivalente cu triunghiul ACD .
- c) Enumerați triunghiurile echivalente cu triunghiul ABD .
- d) Descoperiți un triunghi echivalent cu trapezul $ABCD$.
- e) $\mathcal{A}_{ABD} = 79,3\sqrt{7}$ dm² și $\mathcal{A}_{ADC} = 12,4\sqrt{7}$ dm². Aflați $\mathcal{A}_{ABCD}$.



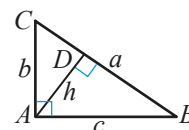
5. Fie triunghiul echilateral ABC cu laturile de lungime l : și înălțimea h . Copiați și completați tabelul:

$\mathcal{A}_{ABC}$ (dm ²)			$169\sqrt{3}$			$225\sqrt{3}$	
l (dm)		$5\sqrt{3}$			24		
h (dm)	15			$9\sqrt{3}$			35



6. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea $AD = h$. Copiați și completați tabelul:

$\mathcal{A}_{ABC}$ (cm ²)							
h (cm)							
a (cm)	40	97	55		29		61
b (cm)	41		48	77	21	28	
c (cm)		65		36		45	11



7. Aplicând teorema lui Heron, calculați aria unui triunghi cu laturile de lungimi a, b, c , dacă:

- a) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 13$ cm;
- b) $a = 16$ cm, $b = 19$ cm, $c = 17$ cm;
- c) $a = 31$ cm, $b = 34$ cm, $c = 37$ cm;
- d) $a = 28$ cm, $b = 35$ cm, $c = 31$ cm.

8. Copiați și completați propozițiile:

- a) Triunghiul echilateral înscris în cercul de rază R are $l_3 = \dots$, $a_3 = \dots$, $\mathcal{A}_3 = \dots$
- b) Pătratul înscris în cercul de rază R are $l_4 = \dots$, $a_4 = \dots$, $\mathcal{A}_4 = \dots$
- c) Hexagonul regulat înscris în cercul de rază R are $l_6 = \dots$, $a_6 = \dots$, $\mathcal{A}_6 = \dots$

9. Fie cercul de rază R triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul regulat, înscrise în acest cerc. Copiați și completați propozițiile:

R (cm)	l_3 (cm)	a_3 (cm)	$\mathcal{A}_3$ (cm ²)	l_4 (cm)	a_4 (cm)	$\mathcal{A}_4$ (cm ²)	l_6 (cm)	a_6 (cm)	$\mathcal{A}_6$ (cm ²)
4									
6									
8									
9									

3. Ariile patruleterelor

1) Patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal. Dreptunghiul $MNPQ$ are laturile paralele cu diagonalele lui $ABCD$. Deoarece $AODQ$, $AMBO$, $BNCO$, $OCPD$ sunt dreptunghiuri $\mathcal{A}_{MNPQ} = 2\mathcal{A}_{ABCD} = AC \cdot BD$, $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5AC \cdot BD$.

2) Rombul este un patrulater ortodiagonal, deci aria lui este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor lui.

Se constată că 1) constituie demonstrația pentru următoarea

Teoremă. Aria patrulaterului ortodiagonal $ABCD$ este $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5AC \cdot BD$ (semiprodusul lungimilor diagonalelor).

Corolar. Aria rombului $ABCD$ este $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5AC \cdot BD$ (semiprodusul lungimilor diagonalelor).

3) Trapezul $ABCD$ are baza mare AB , baza mică DC și înălțimea h . Trapezul $ABCD$ este congruent cu trapezul $NCBM$. $AMND$ este paralelogram deoarece are două laturi opuse paralele și congruente. $\mathcal{A}_{AMND} = AM \cdot h = 2\mathcal{A}_{ABCD} = (AB + DC)h$, de unde $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5(AB + DC)h$.

Se constată că 3) constituie demonstrația pentru următoarea

Teoremă. Aria trapezului $ABCD$ cu baza mare de lungime B , baza mică de lungime b și înălțimea h este $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5h(B + b)$.

Corolar. Aria unui trapez este egală cu produsul hm , unde h este înălțimea și m este lungimea liniei mijlocii a trapezului.

4) Trapezul $ABCD$ are baza mare AB , baza mică DC . În desen punctele A, B, E sunt coliniare astfel încât $BE = DC$, (1). (1) implică: $BECD$ este paralelogram, (2). (2) $\Rightarrow \mathcal{A}_{CBE} = \mathcal{A}_{BCD}$, (3). $\mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{ADC} = 0,5h \cdot DC$, h – înălțimea trapezului, (4). (3) și (4) $\Rightarrow$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ADC} + \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{BEC} + \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AEC}.$$

Se constată că 3) constituie demonstrația pentru următoarea

Teoremă. Aria trapezului cu bazele de lungimi b și B și diagonalele de lungimi d_1 și d_2 este egală cu aria unui triunghi cu laturile de lungimi $a = b + B$, $b = d_1$ și $c = d_2$.

Corolar. Aria unui trapez este egală cu produsul hm , unde h este înălțimea și m este lungimea liniei mijlocii a trapezului.

Corolar. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare $AB = B$, baza mică $DC = b$ și $m(\angle CAB) = x^\circ$. Atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ADC} = 0,5AC \cdot (b + B) \sin x^\circ$. $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AEC} = 0,5h((b + B))$, (1) și $h = AC \cdot \sin x^\circ$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ADC} = 0,5AC \cdot (b + B) \sin x^\circ$.

Teoremă. Aria patrulaterului convex cu diagonalele de lungimi d_1, d_2 unul dintre unghiurile formate de ele cu măsura de x° este $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5d_1d_2 \cdot \sin x^\circ$.

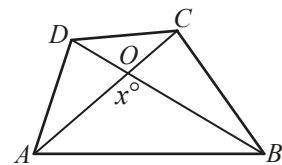
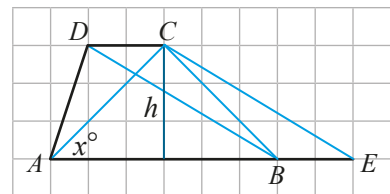
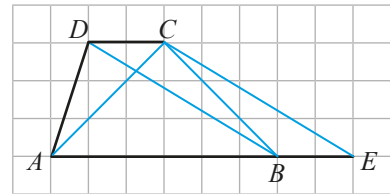
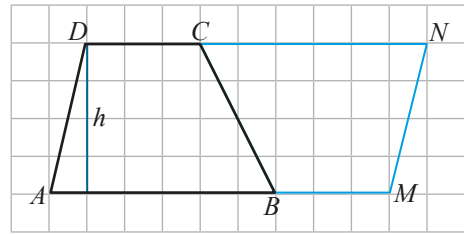
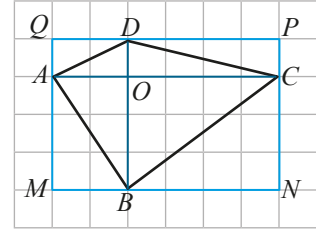
Lungimea cercului. Aria discului

Lungimea cercului de rază R este $2\pi R$, $\pi = 3,14...$

Lungimea arcului de n° este $\frac{\pi R n}{180}$.

Aria discului de rază R este πR^2 , $\pi = 3,14...$

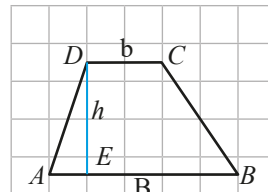
Aria sectorului de cerc de n° este $\frac{\pi R^2 n}{360}$.



■ Exerciții

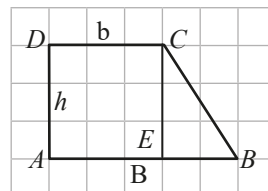
- Calculați aria patrulaterului ortodiagonal $ABCD$ cu:
 - $AC = 14$ cm și $BD = 15$ cm;
 - $AC = 16$ cm și $BD = 17$ cm;
 - $AC = 13$ cm și $BD = 18$ cm;
 - $AC = 7\sqrt{3}$ dm și $BD = 19$ dm;
 - $AC = 16\sqrt{6}$ dm și $BD = 14\sqrt{3}$ dm.
- Calculați aria rombului $ABCD$ cu:
 - $AC = 16$ cm și $BD = 51$ cm;
 - $AC = 42$ cm și $BD = 35$ cm;
 - $AC = 17$ cm și $BD = 44$ cm;
 - $AC = 9\sqrt{7}$ dm și $BD = 23$ dm;
 - $AC = 31\sqrt{5}$ dm și $BD = 39\sqrt{6}$ dm.
- Aflați aria rombului $ABCD$, dacă:
 - $AB = 12$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$;
 - $AB = 14$ cm și $m(\angle A) = 45^\circ$;
 - $AB = 8$ cm și $m(\angle A) = 60^\circ$;
 - $AB = 15$ cm și $m(\angle A) = 120^\circ$;
 - $AB = 18$ cm și $m(\angle A) = 150^\circ$;
 - $AB = 18$ cm și $m(\angle A) = 135^\circ$.
- Fie trapezul $ABCD$ din desen. Completați tabelul:

$\mathcal{A}(\text{cm}^2)$							
B (cm)	12	14	18	24	27	43	51
b (cm)	8	7	11	15	15	25	27
h (cm)	11	5	7	9	29	36	31



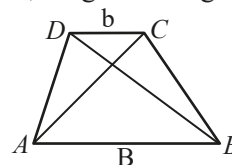
- Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ din desen. Completați tabelul:

$\mathcal{A}(\text{cm}^2)$	B (cm)	b (cm)	h (cm)	CE (cm)	BE (cm)	BC (cm)
	21	15	8			
		18		8	6	
	73			16		65



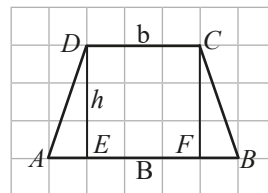
- Fie trapezul $ABCD$ din desen: b – lungimea bazei mici; B – lungimea bazei mari; lungimile diagonalelor $AC = d_1$ și $BD = d_2$. (Aplicați formula lui Heron.)

$\mathcal{A}(\text{cm}^2)$	B (cm)	b (cm)	(B + b) (cm)	d_1 (cm)	d_2 (cm)
	24	10		25	27
		25	56	29	32
	42		65	47	25



- Fie trapezul $ABCD$ din desen. Aflați aria trapezului, dacă:
 - $B = 15$ cm, $b = 12$ cm, $AD = 9$ cm, $m(\angle A) = 30^\circ$;
 - $B = 17$ cm, $b = 13$ cm, $AD = 8$ cm, $m(\angle A) = 45^\circ$;
 - $B = 24$ cm, $b = 17$ cm, $AD = 12$ cm, $m(\angle A) = 60^\circ$.
- Aflați aria unui patrulater convex cu diagonalele de lungimi d_1, d_2 și unul dintre unghiurile formate de ele cu măsura de x° , dacă: a) $d_1 = 13$ cm, $d_2 = 17$ cm și $x^\circ = 30^\circ$; b) $d_1 = 21$ cm, $d_2 = 29$ cm și $x^\circ = 30^\circ$.
- Fie trapezul isoscel $ABCD$ din desen. Completați tabelul:

$\mathcal{A}(\text{cm}^2)$	B (cm)	b (cm)	h (cm)	AE (cm)	BE (cm)	BC (cm)
	21	15	8			
		45		15		17
	73			20	21	



- Fie cercul de rază R . Completați tabelul:

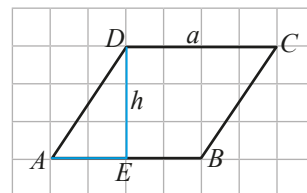
R (cm)	8	12	15	17	19	24	32
Lungimea cercului (cm)							
Aria discului (cm^2)							
Lungimea arcului de 60° (cm)							
Aria sectorului de cerc de 90° (cm^2)							



Sinteză

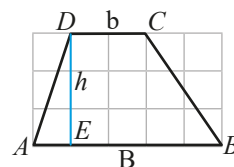
- Aflați aria pătratului cu laturile de lungime: a) 1,9 m; b) 2,3 m; c) 10,5 m; d) 11,5 m.
- Aflați lungimea unei diagonale a unui pătrat cu laturile de lungime: a) 17 dm; b) 15,3 dm; c) 62,3 dm.
- Aflați aria triunghiului dreptunghic isoscel având catetele de:
 - 33,5 cm;
 - 66,5 cm;
 - 11,5 cm;
 - 21,5 cm.
- Aflați lungimile catetelor triunghiului dreptunghic isoscel având aria de:
 - 40,5 cm²;
 - 50 cm²;
 - 72 cm²;
 - 98 cm².
- Un dreptunghi are dimensiunile a , b , o diagonală de lungime d , perimetrul $\mathcal{P}$ și aria $\mathcal{A}$. Copiați și completați tabelul.

$\mathcal{A}$ (cm ²)					
$\mathcal{P}$ (cm)					
a (cm)		9	16	11	13
b (cm)	24		63		84
d (cm)	25	41		61	
- Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor și înălțimea din vârful unghiului drept b , c și h . Aflați h și aria triunghiului dreptunghic cu:
 - $b = 12$ cm și $c = 16$ cm;
 - $b = 16$ cm și $c = 30$ cm;
 - $b = 14$ cm și $c = 48$ cm.
- Aflați raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, dacă coeficientul (raportul) lor de asemănare este:
 - 11;
 - 15;
 - 9;
 - 8.
- Aflați coeficientul de asemănare a două triunghiuri asemenea, dacă raportul ariilor lor este: a) 81; b) 100; c) 144; d) 169.
- Paralelogramul $ABCD$ are o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare ei h . Aflați aria paralelogramului, dacă:
 - $a = 13$ cm și $h = 9$ cm;
 - $a = 27$ cm și $h = 11$ cm;
 - $a = 34$ cm și $h = 6$ cm;
 - $a = 54$ cm și $h = 3$ cm.
- Paralelogramul $ABCD$ are laturile de lungimi a și b . Aflați aria paralelogramului, dacă:
 - $a = 24$ cm, $b = 5$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$;
 - $a = 28$ cm, $b = 9$ cm și $m(\angle A) = 60^\circ$;
 - $a = 22$ cm, $b = 14$ cm și $m(\angle A) = 150^\circ$;
 - $a = 35$ cm, $b = 16$ cm și $m(\angle A) = 120^\circ$.
- Aflați aria triunghiului ABC cu $BC = a$ și h_a înălțimea din A , dacă:
 - $a = 14$ cm și $h_a = 9$ cm;
 - $a = 18$ cm și $h_a = 12$ cm;
 - $a = 17$ cm și $h_a = 16$ cm.
- Aflați aria triunghiului ABC , dacă:
 - $a = 21$ cm, $b = 18$ cm, $m(\angle C) = 30^\circ$;
 - $a = 18$ cm, $b = 7$ cm, $m(\angle C) = 60^\circ$;
 - $a = 17$ cm, $b = 12$ cm și $m(\angle C) = 45^\circ$;
 - $a = 16$ cm, $b = 11$ cm și $m(\angle C) = 135^\circ$.
- Calculați aria patrulaterului ortodiagonal $ABCD$ cu:
 - $AC = 18$ cm și $BD = 11$ cm;
 - $AC = 14$ cm și $BD = 13$ cm;
 - $AC = 16$ cm și $BD = 15$ cm.
- Calculați aria rombului $ABCD$ cu:
 - $AC = 8$ cm și $BD = 23$ cm;
 - $AC = 12$ cm și $BD = 9$ cm;
 - $AC = 16$ cm și $BD = 11$ cm.
- Aflați aria rombului $ABCD$, dacă:
 - $AB = 12$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$;
 - $AB = 14$ cm și $m(\angle A) = 45^\circ$;
 - $AB = 8$ cm și $m(\angle A) = 135^\circ$;
 - $AB = 15$ cm și $m(\angle A) = 120^\circ$;
 - $AB = 8$ cm și $m(\angle A) = 150^\circ$.
- Fie triunghiul echilateral cu laturile de lungime l , înălțimile de lungime h și aria $\mathcal{A}$. Aflați:
 - h și $\mathcal{A}$, dacă $l = 18$ cm;
 - h și $\mathcal{A}$, dacă $l = 20$ cm;
 - h și $\mathcal{A}$, dacă $l = 24$ cm.
- Fie triunghiul echilateral cu laturile de lungime l , înălțimile de lungime h și aria $\mathcal{A}$. Aflați:
 - l și h , dacă $\mathcal{A} = 15\sqrt{3}$ cm²;
 - l și h , dacă $\mathcal{A} = 24\sqrt{3}$ dm²;
 - l și h , dacă $\mathcal{A} = 30\sqrt{3}$ dm².
- Aflați aria unui triunghi isoscel cu laturile congruente de lungime l și unghiul format de ele de măsură x° , dacă:
 - $l = 35$ cm și $x^\circ = 30^\circ$;
 - $l = 48$ cm și $x^\circ = 60^\circ$;
 - $l = 54$ cm și $x^\circ = 45^\circ$;
 - $l = 72$ cm și $x^\circ = 120^\circ$;
 - $l = 36$ cm și $x^\circ = 135^\circ$;
 - $l = 81$ cm și $x^\circ = 150^\circ$.



19. Fie trapezul $ABCD$ cu lungimile bazelor B , b , lungimea liniei mijlocii m și înălțimea h . Copiați și completați tabelul:

B	b	h	m	$\mathcal{A}$
11 cm	7 cm	9 cm		
17 cm	11 cm	8 cm		
23 cm	15 cm	11 cm		
25 cm	17 cm	13 cm		



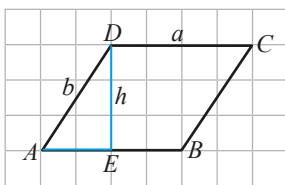
20. Fie trapezul $ABCD$ cu lungimile bazelor B , b și înălțimea h . Aflați aria trapezului, dacă:
- $B = 23$ cm, $b = 11$ cm, $AD = 6$ cm, $m(\angle A) = 30^\circ$;
 - $B = 19$ cm, $b = 15$ cm, $AD = 12$ cm, $m(\angle A) = 45^\circ$;
 - $B = 18$ cm, $b = 14$ cm, $AD = 12$ cm, $m(\angle A) = 60^\circ$.
21. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$. Aflați aria trapezului, dacă:
- $B = 16$ cm, $b = 12$ cm, $m(\angle B) = 30^\circ$;
 - $B = 19$ cm, $b = 11$ cm, $m(\angle B) = 45^\circ$;
 - $B = 21$ cm, $b = 15$ cm, $m(\angle B) = 60^\circ$.

Evaluare

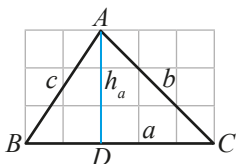
I

- Aflați perimetrul și aria pătratului $ABCD$ cu laturile de lungime 26 cm.
- Aflați lungimile laturilor pătratului cu aria de $57,76 \text{ cm}^2$.
- Aflați aria triunghiului dreptunghic isoscel având catetele de 3,6 cm.
- Aflați aria triunghiului dreptunghic având catetele de 2,8 cm și 4,2 cm.
- Aflați raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, dacă coeficientul de asemănare a triunghiurilor este 3,7.

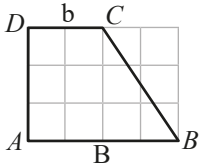
6. Aflați aria paralelogramului $ABCD$ cu: a) $h = 8$ cm și $a = 11$ cm; b) $a = 15$ cm, $a = 12$ cm și $m(\angle A) = 60^\circ$.



7. Aflați aria:
- patrulaterului ortodiagonal $ABCD$ cu $AC = 12$ și $BD = 15$;
 - rombului cu $AB = 18$ și $m(\angle A) = 45^\circ$.



8. Aflați aria triunghiului ABC cu: a) $h_a = 14$ cm și $a = 9$ cm; b) $a = 24$ cm, $b = 18$ cm, $m(\angle B) = 150^\circ$.

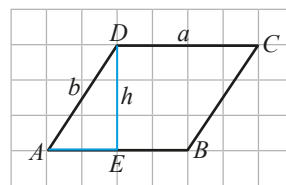


9. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$. Aflați aria trapezului, dacă: $B = 28$ cm, $b = 22$ cm, $m(\angle B) = 30^\circ$.

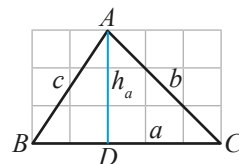
II

- Aflați perimetrul și aria pătratului $ABCD$ cu laturile de lungime 31 cm.
- Aflați lungimile laturilor pătratului cu aria de $53,29 \text{ cm}^2$.
- Aflați aria triunghiului dreptunghic isoscel având catetele de 2,9 cm.
- Aflați aria triunghiului dreptunghic având catetele de 2,4 cm și 3,9 cm.
- Aflați raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, dacă coeficientul de asemănare a triunghiurilor este 3,4.

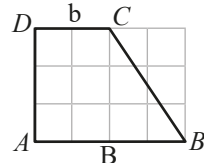
6. Aflați aria paralelogramului $ABCD$ cu: a) $h = 11$ cm și $a = 14$ cm; b) $a = 18$ cm, $a = 15$ cm și $m(\angle A) = 30^\circ$.



7. Aflați aria:
- patrulaterului ortodiagonal $ABCD$ cu $AC = 15$ și $BD = 18$;
 - rombului cu $AB = 26$ și $m(\angle A) = 45^\circ$.



8. Aflați aria triunghiului ABC cu: a) $h_a = 18$ cm și $a = 11$ cm; b) $a = 22$ cm, $b = 25$ cm, $m(\angle B) = 135^\circ$.



9. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$. Aflați aria trapezului, dacă: $B = 23$ cm, $b = 17$ cm, $m(\angle B) = 60^\circ$.

Suplimentar

Amintim valorile importante ale funcțiilor trigonometrice

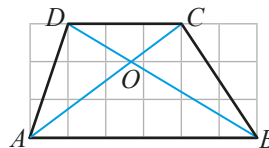
grade	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radiani	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	π
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1
tangentă	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotangentă	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există

1. Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, r raza cercului înscris în triunghi și $p = 0,5(a + b + c)$. Arătați că: $\mathcal{A}_{ABC} = pr$.
2. **(Formula înălțimii)** Demonstrați formula de calcul a înălțimii din A a triunghiului ABC în funcție de lungimile laturilor (a , b , c) și de semiperimetrul său, p .
3. **(Formula lui Heron)** Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și semiperimetrul triunghiului $p = 0,5(a + b + c)$. Demonstrați că: $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
4. Fie triunghiul ABC cu $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 8$ cm. Aflați raza cercului înscris în triunghi.
5. Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și R raza cercului circumscris. Arătați că $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.
6. Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ și R raza cercului circumscris. Demonstrați că:

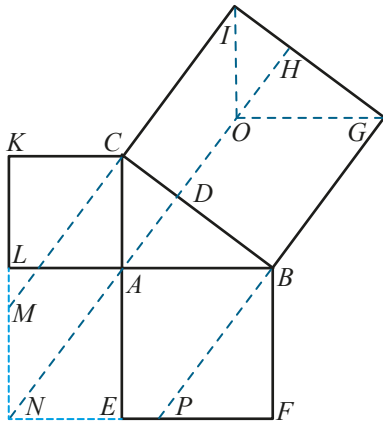
$$\mathcal{A}_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$
7. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 8 cm, $m(\angle A) = 30^\circ$, $m(\angle B) = 45^\circ$. Aflați aria triunghiului ABC .
8. Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, p semiperimetrul triunghiului, r raza cercului înscris, R raza cercului circumscris și aria $\mathcal{A}$. Copiați și completați tabelul:

a (cm)	b (cm)	c (cm)	p (cm)	$\mathcal{A}$ (cm ²)	r (cm)	R (cm)
8	7	11				
6	9	5				
12	15	17				
15	18	7				

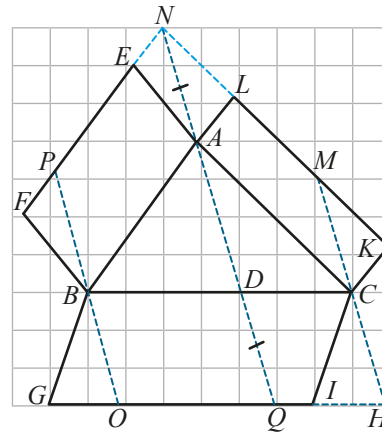
9. Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, p semiperimetrul triunghiului, h_a , h_b , h_c înălțimile triunghiului și aria $\mathcal{A}$. Aflați h_a , h_b , h_c , dacă: a) $a = 4$, $b = 7$, $c = 9$; b) $a = 9$, $b = 11$, $c = 14$.
10. Fie triunghiul ABC . Aflați $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, dacă: a) $a = 12$, $b = 15$, $c = 17$; b) $a = 19$, $b = 23$, $c = 26$.
11. Fie triunghiul ABC cu medianele AD , BE , CF și G centrul de greutate. Demonstrați că triunghiurile:
 - a) ABG și ACG sunt echivalente;
 - b) BGF și CGE sunt echivalente.
12. Fie trapezul $ABCD$ cu O intersecția diagonalelor. Demonstrați că triunghiurile AOD și BOC sunt echivalente.



13. (Teorema lui Pitagora) Triunghiul ABC este dreptunghic; $AEFB$, $BGIC$, $ACKL$ sunt pătrate. Reproduceți desenul și demonstrați că: $\mathcal{A}_{BGIC} = \mathcal{A}_{AEFB} + \mathcal{A}_{ACKL}$.

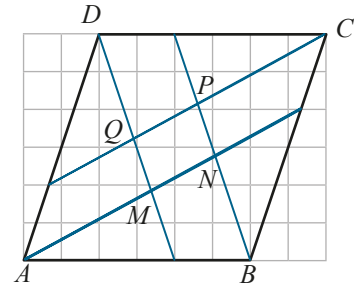


14. (Teorema lui Pappus-Clairaut) Fie triunghiul oarecare ABC . $AEFB$, $BGIC$, $ACKL$ sunt paralelograme, $[AN] \equiv [DQ]$. Reproduceți desenul și demonstrați că: $\mathcal{A}_{BGIC} = \mathcal{A}_{AEFB} + \mathcal{A}_{ACKL}$.

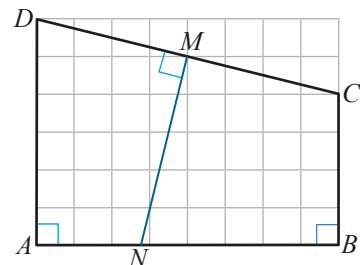
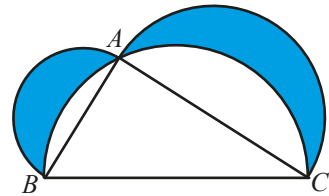


15. $ABCD$ este paralelogram. Reproduceți desenul pe o rețea de pătrate.

Examinați construcția și aflați valoarea raportului: $\frac{\mathcal{A}_{MNPO}}{\mathcal{A}_{ABCD}}$.

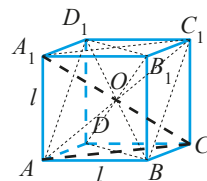


16. Aflați aria unui triunghi, dacă medianele lui au lungimile de:
 a) 12 cm, 15 cm, 21 cm; b) 15 cm, 36 cm, 39 cm;
 c) 24 cm, 45 cm, 51 cm; d) 23 cm, 21 cm, 35 cm.
17. $ABCD$ este un patrulater convex cu intersecția diagonalelor punctul O . Demonstrați că $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5d_1d_2 \sin O$.
18. (Formula lui Brahmagupta) Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu lungimile laturilor a, b, c, d și p semiperimetrul patrulaterului. Demonstrați că aria patrulaterului este $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.
19. Triunghiul ABC este dreptunghic. Fiecare latură a triunghiului este diametrul unui semicerc. Demonstrați că aria porțiunii colorate este egală cu aria triunghiului ABC .
20. Aflați aria patrulaterului inscriptibil $ABCD$ cu lungimile laturilor 1 cm, 5 cm, 5 cm, 7 cm.
21. D aparține laturii BC a triunghiului ABC , E este mijlocul $[AD]$, F este mijlocul $[BE]$, G este mijlocul $[CF]$. Aflați aria triunghiului EFG , dacă $\mathcal{A}_{ABC} = 72 \text{ cm}^2$.
22. Aflați raportul dintre aria pătratului înscris în cercul de rază R și triunghiul echilateral circumscris aceluiași cerc.
23. Triunghiul ABC are $AB = 13 \text{ cm}$, $BC = 14 \text{ cm}$, $AC = 15 \text{ cm}$. $MN \perp BC$ astfel încât descompune triunghiul ABC în figuri geometrice echivalente. Aflați MN .
24. Cu ajutorul informațiilor din desen calculați aria patrulaterului $ANMD$.
25. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC are ipotenuza tangentă cercului de centru O , iar AB și AC sunt tangente cercului respectiv în E și F . Aflați aria cercului, dacă $AB = 3 \text{ cm}$.



1. Prisma. Elementele unei prisme. Clasificare

Cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are toate **fețele** pătrate congruente. **Bazele** cubului sunt pătratele $ABCD$ și $A_1 B_1 C_1 D_1$. Vârfurile cubului sunt punctele: $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$. Fețele opuse sunt conținute de plane paralele. Câte patru dintre cele 12 muchii sunt paralele. Dacă două dintre muchii nu sunt paralele, atunci ele sunt perpendiculare. Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor.



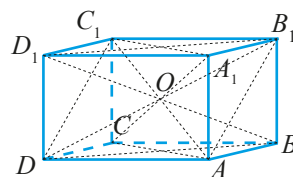
Diagonalele cubului. Diagonalele cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt segmentele: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 . Dreptunghiurile $ABC_1 D_1$ și $ACC_1 A_1$ au diagonala comună AC_1 . Rezultă că diagonalele lor sunt congruente și au același mijloc: $[BD_1] \equiv [AC_1] \equiv [CA_1]$, (1). Analog se arată că: $[DB_1] \equiv [AC_1] \equiv [CA_1]$, (2). (1) și (2) implică: diagonalele cubului sunt congruente și au același mijloc.

Fiecare diagonală a unui cub cu muchiile de lungimi l este ipotenuza unui triunghi dreptunghic ale cărui catete au lungimile l și $l\sqrt{2}$ (lungimea diagonalelor fețelor cubului), unde l este lungimea muchiilor cubului. $AA_1 \perp (ABC)$ implică triunghiul ACA_1 este dreptunghic cu ipotenuza CA_1 – diagonala cubului. Cubul are muchiile de lungime l . Rezultă $AC = l\sqrt{2}$, iar $CA_1 = l\sqrt{3}$.

Teoremă. Diagonalele cubului sunt congruente și au același mijloc. Un cub cu muchiile de lungime l are diagonalele de lungime $l\sqrt{3}$. Diagonalele fețelor lui au lungimile $l\sqrt{2}$.

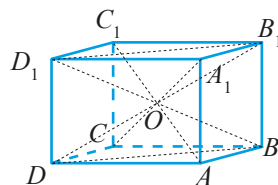
Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are toate fețele dreptunghiuri. Muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor lui și oricare două dintre muchiile neparalele sunt perpendiculare.

Diagonalele paralelipipedului dreptunghic. Diagonalele paralelipipedului dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt segmentele: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 . Dreptunghiurile $DBB_1 D_1$ și $DAB_1 C_1$ au diagonala comună DB_1 . Rezultă că diagonalele lor sunt congruente și au același mijloc: $[BD_1] \equiv [DB_1] \equiv [AC_1]$, (1). Analog se arată că: $[DB_1] \equiv [AC_1] \equiv [CA_1]$, (2). (1) și (2) implică: diagonalele paralelipipedului dreptunghic sunt congruente și au același mijloc.



Teoremă. Diagonalele paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile a, b, c au același mijloc și au aceeași lungime, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Paralelipipedul drept $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are toate muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor, iar bazele sunt paralelograme. Fețele laterale ale paralelipipedului drept sunt dreptunghiuri. Diagonalele paralelipipedului drept $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ sunt segmentele: AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 . Diagonalele paralelipipedului drept au același mijloc.



Prisma dreaptă. O prismă dreaptă are muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor. **Prismele regulate** sunt prismele drepte cu bazele poligoane regulate (triunghi echilateral, pătrat, pentagon regulat, hexagon regulat etc.).

Suplimentar. Axiome importante

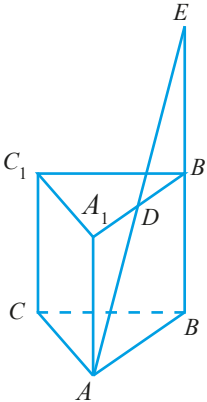
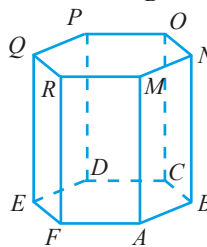
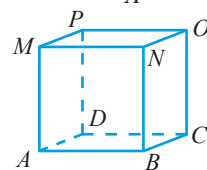
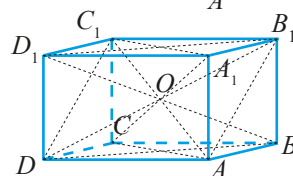
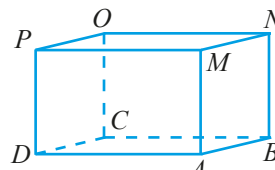
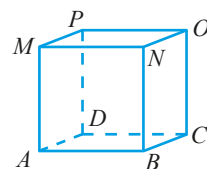
Punctul, dreapta, planul, spațiul, distanța sunt noțiuni primare. Ele nu pot fi definite. Ele se introduc prin axiome (propoziții matematice nedemonstrabile). O mulțime de puncte formează o figură geometrică.

A₁. Axioma dreptei. Două puncte diferite determină o dreaptă. (Există o dreaptă și numai una.)

A₂. Postulatul lui Euclid. Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată. **A₃.** Există un singur plan care conține trei puncte necoliniare. Un plan este determinat de trei puncte necoliniare.

■ Exerciții

1. Fie cubul $ABCDMNOP$. Enumerați:
 - a) vârfurile cubului;
 - b) fețele cubului;
 - c) fețele laterale ale cubului;
 - d) bazele cubului.
2. a) Enumerați diagonalele cubului din desen.
 b) Aflați diagonalele bazei $ABCD$ cu $AB = 5$ cm. c) Aflați diagonalele feței $BCON$ dacă $AB = 12$ cm.
 d) Aflați DN , dacă $AB = 15$ cm.
3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNOP$. Enumerați muchiile congruente cu: a) $[AD]$; b) $[CD]$; c) $[AM]$.
4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are dimensiunile a, b, c . Aflați lungimile diagonalelor fețelor, dacă:
 - a) $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm;
 - b) $a = 11$ cm, $b = 15$ cm, $c = 4$ cm;
 - c) $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $c = 12$ cm;
 - d) $a = 18$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm.
5. Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are dimensiunile a, b, c . Aflați lungimile diagonalelor paralelipipedului, dacă:
 - a) $a = 16$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm;
 - b) $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 8$ cm;
 - c) $a = 13$ cm, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm;
 - d) $a = 16$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm.
6. Cubul $ABCDMNOP$ are muchiile de lungime l . Aflați aria triunghiului ANC , dacă:
 - a) $l = 24$ cm;
 - b) $l = 8$ cm;
 - c) $l = 18$ cm;
 - d) $l = 7$ cm.
7. $ABCDEFGH MNOPQR$ este o prismă regulată. Enumerați muchiile congruente cu:
 - a) $[AB]$;
 - b) $[AM]$.
8. Fie prisma regulată $ABCDEFGH MNOPQR$. Enumerați segmentele congruente cu:
 - a) $[EM]$;
 - b) $[EN]$;
 - c) $[FM]$.
9. Fie prisma din regulată $ABCDEFGH MNOPQR$. cu $AB = 5$ cm și $AM = 12$ cm. Aflați: a) EM ; b) EN ; c) FM .
10. Fie prisma dreaptă $ABCA_1 B_1 C_1$ are fețele laterale pătrate. D este mijlocul $[A_1 B_1]$. Dacă $AB = 9$ cm, aflați: a) AD ; b) DE ; c) $C_1 E$.
11. Fie prisma dreaptă $ABCA_1 B_1 C_1$ are fețele laterale pătrate. Adăugați F – intersecția $[B_1 C_1]$ cu CE . Aflați: a) $B_1 F$; b) EF ; c) CE .
12. Prisma $ABCA_1 B_1 C_1$ are fețele laterale pătrate cu laturile de 30 cm. Aflați aria triunghiului $A_1 BC$.
13. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c . Aflați aria triunghiului $A_1 BC$, dacă $a = 12$ cm, $b = 20$ cm, $c = 15$ cm.
14. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c . Aflați dimensiunile lui, dacă ele sunt direct proporționale cu 2, 3, 5 și lungimea diagonalelor lui este $2\sqrt{38}$ cm.
15. Prisma $ABCA_1 B_1 C_1$ are fețele laterale dreptunghiuri. D este mijlocul $[A_1 B_1]$, iar E este mijlocul $[A_1 C_1]$. Demonstrați că BD , CE și AA_1 sunt concurente.



Suplimentar. Axiome importante. Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Punctele A, B, C sunt necoliniare. Planul determinat de ele se notează (ABC) . Un plan se mai notează: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \alpha_2$ etc. **A₄**. Dacă două puncte ale unei drepte sunt interioare unui plan, atunci dreapta este conținută de acel plan. **A₅**. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele au încă un punct comun (dreaptă comună). **A₆**. Există patru puncte necoplanare.

Două drepte sunt **concurente**, dacă ele au un punct comun. Dreptele a și b se intersectează în O , se notează $a \cap b = \{O\}$. Două drepte sunt **paralele**, dacă sunt coplanare și nu au puncte comune. Dreptele paralele c și d se notează $c \parallel d$. Dreptele **necoplanare** nu sunt conținute de același plan.

2. Desfășurarea prisme. Aria laterală. Aria totală

Desfășurarea cubului. Aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale = $4l^2$.

Aria bazei este $\mathcal{A}_b = l^2$. Aria totală $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 6l^2$.

Desfășurarea paralelipipedului dreptunghic

Aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale = perimetrul bazei $\times$ înălțimea = $c(2a + 2b) = 2ac + 2bc$.

Aria bazei este $\mathcal{A}_b =$

$= ab$. Aria totală $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2ab + 2bc + 2ac$, (1).

Diagonala A_1C este ipotenuza triunghiului dreptunghic CAA_1 . Rezultă $A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

(2). (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_t + A_1C^2 = (a + b + c)^2$.

Adunând aria totală

a paralelipipedului dreptunghic cu pătratul lungimii diagonalei se obține pătratul sumei dimensiunilor paralelipipedului.

Desfășurarea prisme triunghiulare regulate

Aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale = perimetrul bazei $\times$

înălțimea = $3ab$. Aria bazei este $\mathcal{A}_b = 0,25a^2\sqrt{3}$. Aria totală $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 3ab + 0,5a^2\sqrt{3}$.

Desfășurarea prisme triunghiulare drepte

O prismă triunghiulară are înălțimea h și muchiile bazelor de lungimi diferite. Atunci aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale = $h(a + b + c)$. Aria totală $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$.

Aria laterală a unei prisme ($\mathcal{A}_l$) este suma ariilor fețelor laterale. Aria totală a unei prisme este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, unde $\mathcal{A}_b$ este aria unei baze.

Teoremă. 1) Un cub cu muchiile de lungimi l are $\mathcal{A}_l = 4l^2$ și $\mathcal{A}_t = 6l^2$. 2) Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c și lungimea diagonalelor d . Atunci: $\mathcal{A}_l = 2ac + 2bc$, $\mathcal{A}_b = ab$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2ab + 2bc + 2ac$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $\mathcal{A}_t + d^2 = (a + b + c)^2$.

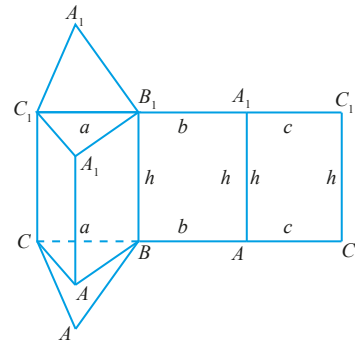
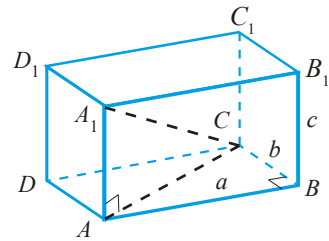
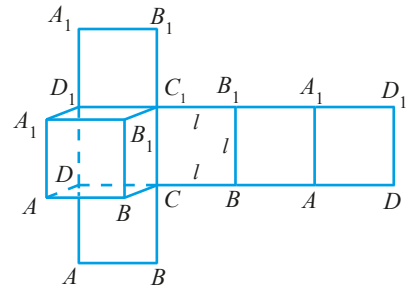
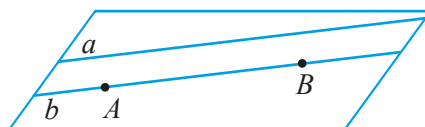
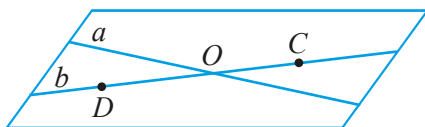
3) O prismă dreaptă are înălțimea h și perimetrul bazei $\mathcal{P}_b$. Atunci $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b h$.

Suplimentar. Determinarea unui plan

O dreaptă și un punct exterior ei determină un plan.

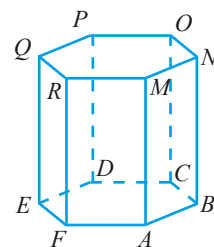
Două drepte concurente determină un plan.

Două drepte paralele determină un plan.



■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Aria laterală a unei prisme este ...
 - Aria totală a unei prisme este ...
 - Un cub cu muchiile de lungimi l are aria laterală ...
 - Un cub cu muchiile de lungimi l are aria totală ...
 - Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c are aria laterală ...
 - Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c are aria totală ...
- Desfășurați cubul $ABCDMNOP$, dacă: a) $AB = 2$ cm; b) $AB = 3$ cm; c) $AB = 4$ cm; d) $AB = 5$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și lungimea diagonalelor cubului cu muchiile de:
 - 15 cm;
 - 12 cm;
 - 18 cm;
 - 24 cm.
- Desfășurați paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile:
 - 2 cm, 3 cm, 5 cm;
 - 4 cm, 3 cm, 3 cm;
 - 5 cm, 2 cm, 2 cm;
 - 4 cm, 2 cm, 5 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și lungimea diagonalelor paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile:
 - 15 cm, 8 cm, 10 cm;
 - 12 cm, 15 cm, 4 cm;
 - 4 cm, 5 cm, 12 cm;
 - 18 cm, 6 cm, 15 cm.
- Desfășurați prisma $ABCA_1B_1C_1$ cu fețele laterale pătrate, dacă:
 - $AB = 2$ cm;
 - $AB = 3$ cm;
 - $AB = 2,5$ cm;
 - $AB = 3,5$ cm.
- Prisma $ABCA_1B_1C_1$ are fețele laterale pătrate. Aflați aria laterală și aria totală a prisme, dacă:
 - $AB = 15$ cm;
 - $AB = 24$ cm;
 - $AB = 36$ cm;
 - $AB = 20$ cm.
- $ABCDEFGHNMOPQR$ este o prismă regulată. Desfășurați prisma, dacă:
 - $AB = 1,5$ cm și $AM = 3$ cm;
 - $AB = 2$ cm și $AM = 4$ cm;
 - $AB = 2,5$ cm și $AM = 3,5$ cm;
 - $AB = 3$ cm și $AM = 2,5$ cm.
- $ABCDEFGHNMOPQR$ este o prismă regulată. Aflați aria laterală și aria totală a prisme, dacă:
 - $AB = 4$ cm și $AM = 3$ cm;
 - $AB = 3$ cm și $AM = 4$ cm;
 - $AB = 2$ cm și $AM = 5$ cm;
 - $AB = 5$ cm și $AM = 4$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu laturile de lungimi a, b și un unghi de măsură u . Înălțimea prisme este h . Aflați aria laterală și aria totală a prisme, dacă:
 - $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $h = 6$ cm și $u = 30^\circ$;
 - $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $h = 6$ cm și $u = 60^\circ$;
 - $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $h = 6$ cm și $u = 45^\circ$;
 - $a = 3$ cm, $b = 8$ cm, $h = 6$ cm și $u = 150^\circ$.
- Prisma dreaptă $ABCA_1B_1C_1$ are bazele triunghiuri dreptunghice având catetele de lungimi 5 cm și 12 cm. Înălțimea prisme este de 15 cm. Aflați aria laterală și aria totală a prisme.
- Aflați lungimile muchiilor bazelor unei prisme hexagonale regulate cu $\mathcal{A}_l = 600$ cm², dacă $l = h$.
- Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c are aria totală 71 cm² și diagonalele de lungime $\sqrt{73}$ cm. Aflați suma dimensiunilor.



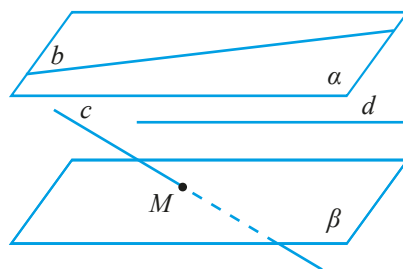
Suplimentar. Poziția unei drepte față de un plan

O dreaptă este **inclusă** într-un (sau conținută de un) plan, dacă are dacă are toate punctele conținute de plan. Conform A_4 , este suficient ca două puncte ale unei drepte să fie conținute de un plan pentru ca dreapta să fie inclusă sau conținută de plan.

O dreaptă este **secantă** cu un plan, dacă dreapta și planul au un singur punct comun. Dreapta c este secantă cu planul β , $c \cap \beta = \{M\}$.

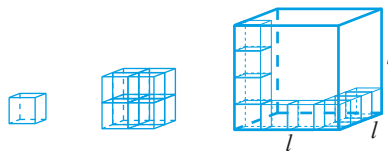
O dreaptă este **paralelă** cu planul, dacă dreapta și planul nu au puncte comune. Dreapta d este paralelă cu planul β , $d \parallel \beta$.

Criteriul de paralelism al unei drepte cu un plan. Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă inclusă într-un plan, atunci dreapta este paralelă cu planul sau este inclusă în plan.



3. Volumul prisme

Volumul cubului. Cu ajutorul cuburilor cu muchiile de 1 cm se poate construi: un cub cu muchiile de 2 cm, utilizând 8 cuburi; un cub cu muchiile de 3 cm, utilizând 27 cuburi; un cub cu muchiile de 4 cm, utilizând 64 de cuburi.



Câte cuburi cu muchiile de 1 cm sunt necesare pentru a obține un cub cu muchiile de l cm?

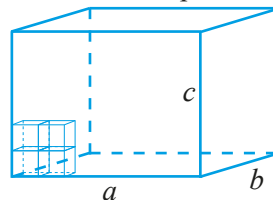
Dacă cubul are muchiile de 1 cm se folosește 1 cub; dacă cubul are muchiile de 2 cm – 8 cuburi; dacă cubul are muchiile de 3 cm – 27 cuburi; dacă cubul are muchiile de 4 cm – 64 de cuburi. Prin urmare, pentru a construi un cub cu muchiile de l cm este nevoie de l^3 cuburi.

Prin definiție, **volumul unui cub cu muchiile de o unitate** (1 mm, 1 cm, 1 m etc.) este 1 (mm^3 , cm^3 , m^3 etc.) – o unitate cubică.

Volumul unui cub cu muchiile de l unități (mm, cm, m etc.) este l^3 unități cubice (mm^3 , cm^3 , m^3 etc.). Volumul cubului cu muchiile de o lungime oarecare reprezintă numărul de cuburi unitate în care cubul se poate descompune.

Volumul paralelipipedului dreptunghic. Cu ajutorul cuburilor cu muchiile de 1 cm se pot construi paralelipipe dreptunghice cu dimensiunile de: 1 cm, 1 cm, 2 cm, utilizând 2 cuburi unitate; 3 cm, 1 cm, 2 cm, utilizând 6 cuburi; 3 cm, 2 cm, 4 cm, utilizând 24 de cuburi unitate.

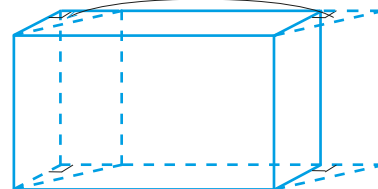
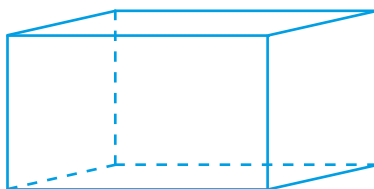
De câte cuburi cu muchiile de 1 cm este nevoie pentru a obține un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de a cm, b cm, c cm? Din exemplele de mai sus deducem că este nevoie de abc cuburi cu muchiile de 1 cm.



Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de a unități (mm, cm, m etc.), b unități (mm, cm, m etc.), c unități (mm, cm, m etc.) este abc unități cubice (mm^3 , cm^3 , m^3 etc.). Volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile de a unități, b unități, c unități reprezintă numărul de cuburi unitate în care se poate descompune paralelipipedul dreptunghic.

Desenul ilustrează cum se obține dintr-un paralelipiped drept cu baza un paralelogram oarecare și un paralelipiped dreptunghic având aceeași înălțime, ariile bazelor egale și același volum.

Teoremă. Volumul unei prisme drepte cu înălțimea h și aria bazei $\mathcal{A}_b$ este $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h$. Volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este $\mathcal{V} = abc$.



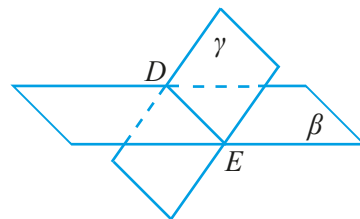
Suplimentar. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele

Două plane sunt confundate, dacă au trei puncte necoliniare comune sau, – o dreaptă și un punct exterior ei comune sau, – două drepte concurente comune sau, – două drepte paralele comune.

Două plane cu o dreaptă comună sunt secante. Conform A5, pentru ca două plane să fie secante este suficient ca ele să aibă un punct comun. Se notează: $\beta \cap \gamma = DE$.

Două plane sunt paralele, dacă nu au puncte comune. Se notează $\alpha \parallel \beta$.

Teorema fierăstrăului. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci intersecția acestui plan cu orice plan secant cu el și care conține dreapta dată este o dreaptă paralelă cu dreapta dată.



Corolar. Intersecțiile unui plan cu două sau mai multe plane paralele sunt drepte paralele.

■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Volumul cubului cu muchiile de lungime l este ...
 - Volumul unei prisme drepte cu aria bazei ... și înălțimea ...
 - Un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c are volumul ...
- Aflați volumul unui cub cu muchiile de lungime l , dacă:
 - $l = 11$ cm; b) $l = 7$ cm; c) $l = 6$ cm; d) $l = 8$ cm.
- Aflați volumul paralelipedului dreptunghic cu dimensiunile:
 - 15 cm, 12 cm, 17 cm; b) 18 cm, 9 cm, 11 cm; c) 13 cm, 18 cm, 19 cm; d) 21 cm, 5 cm, 16 cm.
- O prismă triunghiulară are fețele laterale pătrate. Aflați volumul prisme, dacă are muchiile de lungime:
 - 12 cm; b) 9 cm; c) 10 cm; d) 15 cm.
- Aflați volumul unei prisme triunghiulare regulate, având muchiile bazelor de lungime l și înălțimea h , dacă:
 - $l = 6$ cm și $h = 12$ cm; b) $l = 8$ cm și $h = 9$ cm; c) $l = 15$ cm și $h = 18$ cm; d) $l = 4$ cm și $h = 14$ cm.
- Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate, având muchiile bazelor de lungime l și înălțimea h , dacă:
 - $l = 8$ cm și $h = 15$ cm; b) $l = 6$ cm și $h = 12$ cm; c) $l = 9$ cm și $h = 11$ cm; d) $l = 4$ cm și $h = 13$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele triunghiuri dreptunghice isoscele cu lungimile catetelor c . Înălțimea prisme este h . Aflați volumul prisme, dacă:
 - $c = 8$ cm și $h = 20$ cm; b) $c = 12$ cm și $h = 25$ cm; c) $c = 18$ cm și $h = 28$ cm; d) $c = 4$ cm și $h = 13$ cm.
- Aflați volumul unui cub, dacă are:
 - $\mathcal{A}_l = 100$ cm²; b) $\mathcal{A}_l = 64$ cm²; c) $\mathcal{A}_l = 196$ cm²; d) $\mathcal{A}_l = 324$ cm².
- O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu laturile de lungimi a, b și un unghi de măsură u . Înălțimea prisme este h . Aflați volumul prisme, dacă:
 - $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $h = 8$ cm și $u = 30^\circ$; b) $a = 7$ cm, $b = 3$ cm, $h = 10$ cm și $u = 60^\circ$;
 - $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $h = 12$ cm și $u = 45^\circ$; d) $a = 7$ cm, $b = 3$ cm, $h = 10$ cm și $u = 150^\circ$.
- O prismă dreaptă are bazele triunghiuri echilaterale cu lungimile laturilor l . Înălțimea prisme este h . Aflați volumul prisme, dacă:
 - $l = 5$ cm și $\mathcal{A}_l = 180$ cm²; b) $l = 7$ cm și $\mathcal{A}_l = 315$ cm²; c) $l = 9$ cm și $\mathcal{A}_l = 270$ cm².
- Un vas de forma unui cub cu muchiile de 23 cm este plin cu apă. Vasul se golește în altul de forma unei prisme triunghiulare regulate, cu muchiile bazei de 30 cm. Ce înălțime minimă trebuie să aibă vasul al doilea? (Rotunjiți rezultatele până la întregi.)
- O prismă dreaptă are bazele trapeze isoscele cu bazele de 8 cm și 14 cm și un unghi de 60° . Aflați volumul prisme, dacă înălțimea ei este de 15 cm.
- Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 15 cm, 9 cm, 21 cm. În el se așază cuburi cu muchiile de 3 cm. Aflați numărul maxim de cuburi ce se pot așeza în paralelipipedul dreptunghic.

Suplimentar. Teoreme de paralelism

Teoremă. Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conținută de unul dintre ele este paralelă cu celălalt plan.

Teoremă (Tranzitivitatea paralelismului dreptelor). În spațiu, dacă dreptele diferite a și b sunt paralele cu dreapta c , atunci $a \parallel b$.

Teoremă. Există un singur plan paralel cu un plan dat și care conține un punct dat, exterior lui.

Tranzitivitatea paralelismului planelor. Două plane diferite paralele cu un plan sunt paralele.

Teoremă. Două plane paralele determină pe două sau mai multe drepte paralele segmente congruente.

Corolar (Teorema lui Thales). Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte secante cu planele, segmente proporționale.

Sinteză

- Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui cub cu muchiile de lungime l , dacă:
 - $l = 12$ cm;
 - $l = 15$ cm;
 - $l = 17$ cm;
 - $l = 28$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile:
 - 15 cm, 18 cm, 12 cm;
 - 9 cm, 16 cm, 11 cm;
 - 14 cm, 15 cm, 16 cm;
 - 13 cm, 11 cm, 17 cm.
- O prismă triunghiulară are fețele laterale pătrate. Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme, dacă are muchiile de lungime:
 - 35 cm;
 - 45 cm;
 - 65 cm;
 - 75 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul unei prisme triunghiulare regulate, avînd muchiile bazelor de lungime l și înălțimea h , dacă:
 - $l = 9$ cm și $h = 15$ cm;
 - $l = 15$ cm și $h = 21$ cm;
 - $l = 18$ cm și $h = 25$ cm;
 - $l = 21$ cm și $h = 12$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul unei prisme hexagonale regulate, avînd muchiile bazelor de lungime l și înălțimea h , dacă:
 - $l = 9$ cm și $h = 7$ cm;
 - $l = 6$ cm și $h = 8$ cm;
 - $l = 12$ cm și $h = 7$ cm;
 - $l = 15$ cm și $h = 4$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele triunghiuri dreptunghice isoscele cu lungimile catetelor c . Înălțimea prisme este h . Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme, dacă:
 - $c = 11\sqrt{2}$ cm și $h = 16$ cm;
 - $c = 13\sqrt{7}$ cm și $h = 24$ cm;
 - $c = 18\sqrt{5}$ cm și $h = 17$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele romburi cu laturile de lungime a și un unghi de măsură u . Înălțimea prisme este h . Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme, dacă:
 - $a = 12$ cm, $h = 12$ cm și $u = 30^\circ$;
 - $a = 16$ cm, $h = 10$ cm și $u = 60^\circ$;
 - $a = 9$ cm, $h = 14$ cm și $u = 45^\circ$;
 - $a = 23$ cm, $h = 24$ cm și $u = 150^\circ$.
- O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu laturile de lungimi a , b și un unghi de măsură u . Înălțimea prisme este h . Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme, dacă:
 - $a = 6$ cm, $b = 10$ cm, $h = 12$ cm și $u = 30^\circ$;
 - $a = 9$ cm, $b = 4$ cm, $h = 10$ cm și $u = 60^\circ$;
 - $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $h = 8$ cm și $u = 45^\circ$;
 - $a = 52$ cm, $b = 58$ cm, $h = 30,18$ cm și $u = 135^\circ$.
- O prismă dreaptă are bazele romburi cu laturile de lungime a și o diagonală de lungime d . Prisma are înălțimea h . Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme, dacă:
 - $a = 25$ cm, $d = 48$ cm, $h = 24$ cm;
 - $a = 17$ cm, $d = 30$ cm, $h = 50$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui cub cu diagonalele de lungime d , dacă:
 - $d = 9\sqrt{3}$ cm;
 - $d = 11\sqrt{3}$ cm;
 - $d = 15\sqrt{3}$ cm;
 - $d = 28\sqrt{3}$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele trapeze isoscele. Trapezul unei baze are laturile neparalele sunt congruente cu baza mică și o diagonală este perpendiculară pe o latură neparalelă. Fie b lungimea bazei mici al unui trapez al unei baze a prisme și h înălțimea prisme. Aflați aria totală și volumul prisme, dacă:
 - $b = 18$ cm, $h = 15$ cm;
 - $b = 21$ cm, $h = 28$ cm;
 - $b = 24$ cm, $h = 34$ cm.
- O prismă dreaptă are bazele trapeze congruente. Trapezul unei baze are baza mică de lungime b , baza mare – B , diagonalele de lungimi d_1 și d_2 . Înălțimea piramidei este h înălțimea prisme. Aflați volumul prisme, dacă: $b = 13$ cm, $B = 52$ cm, $d_1 = 16$ cm, $d_2 = 63$ cm, $h = 50,6$ cm.
- O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 7 m, 5 m și 2 m.
 - Ce cantitate de apă este necesară pentru a umple piscina?
 - Câte plăci de ceramică de forma unui pătrat cu laturile de 30 cm au fost necesare pentru a acoperi fundul și pereții piscinei?
- Un container închis are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 3 m, 2 m și 5 m. Alt container are forma unei prisme drepte de înălțime 6 m, cu bazele trapeze isoscele. Bazele trapezului sunt de 4 m și 2 m, iar un unghi alăturat bazei mari are 60° .
 - Comparați capacitățile celor două containere.
 - Comparați cantitățile de tablă necesare confecționării celor două containere.

Evaluare

I

1. Aflați numărul tuturor vârfurilor unei prisme hexagonale. 10
2. Un cub are muchiile de 7 m. Aflați: 20
 - a) aria laterală a cubului;
 - b) aria totală a cubului.
3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 5 m, 7 m și 11 m. Aflați: 20
 - a) aria laterală a paralelipipedului;
 - b) aria totală a paralelipipedului.
4. O prismă triunghiulară are fețele laterale dreptunghiuri congruente. Muchiile bazelor au 5 m și înălțimea prisme este 12 m. Aflați: 20
 - a) aria laterală a prisme;
 - b) aria totală a prisme.
5. Aflați volumul: 20
 - a) unui cub cu muchiile de 9 cm;
 - b) unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 7 m, 12 m, 86 m;
 - c) unei prisme regulate triunghiulare cu muchiile bazelor de 6 m și înălțimea 8 m;
 - d) unei prisme hexagonale regulate cu muchiile bazelor de 4 m și înălțimea 18 m.
6. O prismă dreaptă cu bazele romburi având laturile de 60 cm și una dintre diagonale de 40 cm. Aflați volumul prisme, dacă înălțimea ei este de 15 cm. 10

II

1. Aflați numărul tuturor muchiilor unei prisme hexagonale.
2. Un cub are muchiile de 6 m. Aflați:
 - a) aria laterală a cubului;
 - b) aria totală a cubului.
3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 6 m, 8 m și 13 m. Aflați:
 - a) aria laterală a paralelipipedului;
 - b) aria totală a paralelipipedului.
4. O prismă triunghiulară are fețele laterale dreptunghiuri congruente. Muchiile bazelor au 4 m și înălțimea prisme este 15 m. Aflați:
 - a) aria laterală a prisme;
 - b) aria totală a prisme.
5. Aflați volumul:
 - a) unui cub cu muchiile de 8 cm;
 - b) unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 8 m, 11 m, 82 m;
 - c) unei prisme regulate triunghiulare cu muchiile bazelor de 8 m și înălțimea 6 m;
 - d) unei prisme hexagonale regulate cu muchiile bazelor de 6 m și înălțimea 16 m.
6. O prismă dreaptă cu bazele romburi având laturile de 65 cm și una dintre diagonale de 50 cm. Aflați volumul prisme, dacă înălțimea ei este de 12 cm.

Suplimentar. Drepte perpendiculare. Dreaptă perpendiculară pe un plan

Unghiuri cu laturile respectiv paralele. Unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare. $a \parallel a_1$ și $b \parallel b_1$; $\angle I_1 \equiv \angle O_1$. Unghiurile I_1 și O_2 sunt suplementare.

Unghiul a două drepte în spațiu. Fie dreptele a și b . Prin punctul oarecare P se construiesc $a \parallel a_1$ și $b \parallel b_1$. **Măsura unghiului dreptelor** a și b este măsura unghiului ascuțit format de ele sau de dreptele a_1 și b_1 .

Două drepte sunt perpendiculare dacă măsura unghiului format de ele este 90° .

O dreaptă este **perpendiculară pe un plan**, dacă este perpendiculară pe orice dreaptă inclusă în acel plan.

Criteriul de perpendicularitate a unei drepte pe un plan. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă și numai dacă este perpendiculară pe două drepte concurente conținute de acel plan.

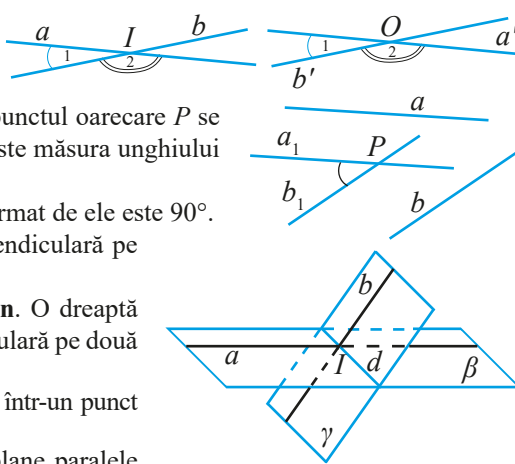
Teoremă. Există o singură dreaptă perpendiculară pe un plan într-un punct al acestuia.

Teoremă. Drepte perpendiculare pe același plan sau pe plane paralele sunt paralele.

Unghiul a două plane. În desen: $\beta \cap \gamma = d$, $I \in d$, $a \subset \beta$, $b \subset \gamma$. a și b sunt perpendicularele în I pe dreapta d .

Măsura unghiului format de planele β și γ este egală cu măsura de cel mult 90° a unuia dintre unghiurile formate de dreptele a și b .

Plane perpendiculare. Două plane sunt perpendiculare, dacă unghiul format de ele este drept.



4. Piramida. Elementele unei piramide. Clasificare

Tetraedrul $ABCD$ este poliedrul determinat de punctele necoplanare A, B, C, D .

Segmentele: AB, BC, CD, AD sunt **muchiile tetraedrului**. **Vârfurile** lui sunt punctele: A, B, C, D .

Fețele tetraedrului sunt determinate de trei dintre cele patru puncte. Distanța de la C la (ABD) , $d(C, (ABD))$ este una dintre **înălțimile** tetraedrului $ABCD$. Celelalte înălțimi sunt: $d(A, (BCD))$, $d(B, (ACD))$, $d(D, (ABC))$.

Tetraedrul $ABCD$ este o **piramidă triunghiulară** cu vârful unul dintre cele patru puncte necoplanare și baza determinată de celelalte trei vârfuri ale lui. Tetraedrul cu toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**. Deoarece locul geometric al punctelor egal depărtate de vârfurile unui triunghi este dreapta perpendiculară pe planul triunghiului și care conține centrul cercului circumscris triunghiului, rezultă că proiecția unui vârf al tetraedrului regulat pe fața opusă lui este centrul cercului circumscris acelei fețe.

Teoremă. Proiecția unui vârf al tetraedrului regulat pe planul feței opuse lui este centrul cercului circumscris triunghiului acelei fețe.

Piramida patrulateră. Poliedrul determinat de patrulaterul $ABCD$ cu punctul V exterior planului ABC este **piramida cu vârful V și baza $ABCD$** , notată $VABCD$. Muchiile laterale ale piramidei sunt segmentele VA, VB, CV, VD .

Înălțimea piramidei este distanța de la vârful ei la planul bazei sale, $h = d(V, (ABC))$.

Piramida pentagonală $VABCDE$ are vârful V și baza sa este determinată de pentagonul $ABCDE$.

Piramida regulată are baza determinată de un poligon regulat (triunghi echilateral, pătrat, pentagon regulat, hexagon regulat etc.) și muchiile lui laterale sunt congruente.

Teorema piramidei regulate.

a) Proiecția vârfului unei piramide regulate pe planul bazei piramidei este centrul cercului circumscris poligonului bazei.

b) Fețele laterale ale unei piramide regulate sunt determinate de triunghiuri isoscele congruente.

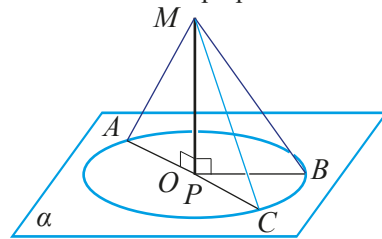
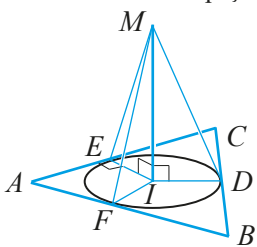
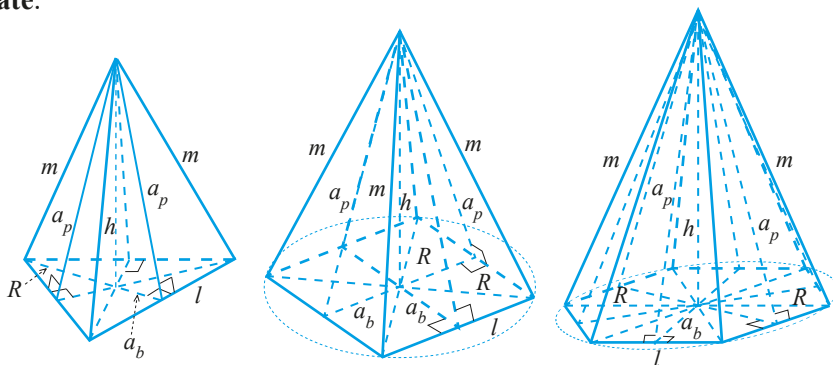
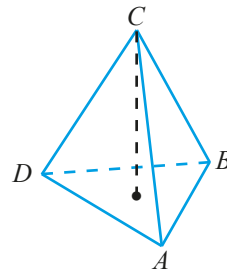
Elementele unei piramide regulate: h – înălțimea (distanța de la vârf la planul bazei piramidei); l – lungimea muchiilor bazei; R – raza cercului circumscris poligonului bazei piramidei; a_p – apotema piramidei (înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului unei fețe laterale a piramidei); a_b – apotema poligonului bazei (raza cercului înscris în poligonul bazei).

Suplimentar. Teoreme de loc geometric

Teoremă. În spațiu locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele unui cerc este perpendiculara în centrul cercului pe planul care conține cercul.

Corolar. Locul geometric al punctelor egal depărtate de vârfurile unui poligon inscriptibil (în particular, un triunghi) este perpendiculara în centrul cercului circumscris poligonului pe planul care conține acest poligon.

Teoremă. Locul geometric al punctelor din spațiu, egal depărtate de laturile unui poligon circumscris unui cerc (în particular, un triunghi) este dreapta perpendiculară pe planul care conține poligonul, în centrul cercului înscris în poligon.

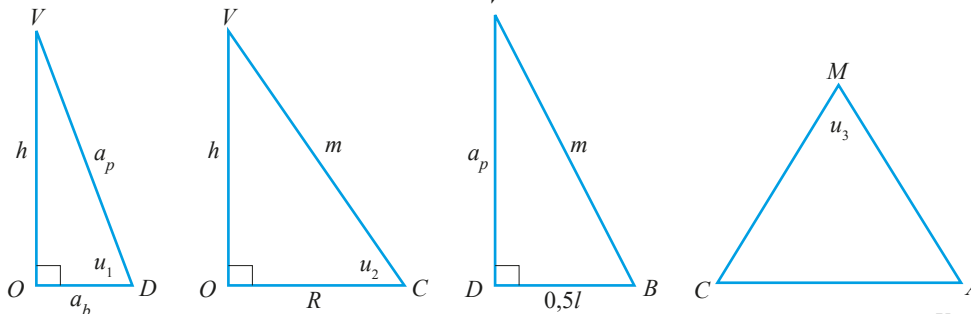
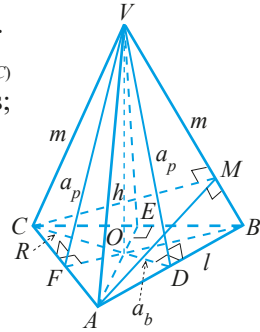


■ Exerciții

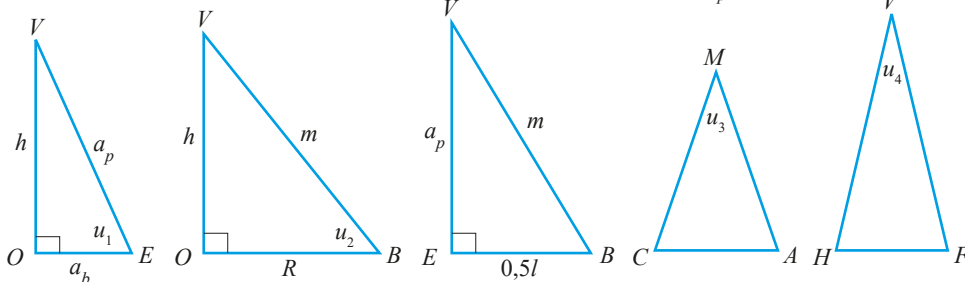
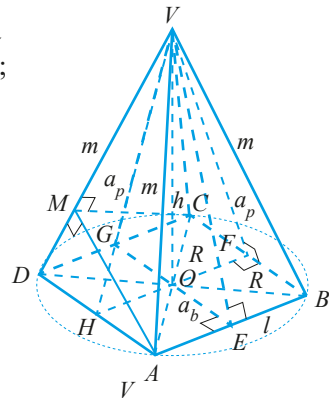
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Tetraedrul $ABCD$ este ...
 - Tetraedrul $MNOP$ este ...
- Fie tetraedrul $MNOP$. Enumerați:
 - muchiile tetraedrului;
 - vârfurile tetraedrului;
 - triunghiurile fețelor tetraedrului;
 - înălțimile tetraedrului.
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - ... se numește tetraedru regulat.
 - Proiecția unui vârf al tetraedrului regulat pe planul feței opuse lui ...
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Piramida $VABCD$...
 - Înălțimea piramidei $VABCD$...
 - Piramida $VABCDE$...
 - Înălțimea piramidei $VABCDE$...
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Piramida regulată ...
 - Proiecția vârfului piramidei regulate ...
 - Fețele laterale ale unei piramide regulate ...
- Fie o piramidă regulată. Completați notațiile: a) h ... b) l ... c) R ... d) a_p ... e) a_b ...
- Reprezentați:
 - piramida triunghiulară regulată $VABC$;
 - înălțimea piramidei;
 - apotemele piramidei.
- Enumerați elementele piramidei regulate $VABC$.
- Reprezentați: a) piramida regulată $VABCD$; b) înălțimea piramidei; c) apotemele piramidei.
- Enumerați elementele piramidei regulate $VABCD$.
- Reprezentați cubul $ABCDMNOP$.
 - Construiți piramida $VABCD$, unde V este centrul pătratului $MNOP$.
 - Construiți înălțimea piramidei.
 - Aflați lungimile muchiilor laterale ale piramidei, dacă $AB = 8$ cm.
- Prisma $ABCA_1B_1C_1$ are fețele laterale pătrate.
 - Construiți piramida $VABC$, unde V este centrul triunghiului $A_1B_1C_1$.
 - Construiți înălțimea piramidei.
 - Aflați lungimile muchiilor laterale ale piramidei, dacă $AB = 12$ cm.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c .
 - Construiți piramida $VABCD$, unde V este centrul dreptunghiului $A_1B_1C_1D_1$.
 - Construiți înălțimea piramidei.
 - Aflați lungimile muchiilor laterale ale piramidei, dacă $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm.
- Prisma $ABCA_1B_1C_1$ are fețele laterale pătrate cu $AB = 18$ cm.
 - Aflați A_1A și A_1C .
 - Aflați înălțimea din B a piramidei A_1ABC .
- $ABCDMNOP$ este cub. $AB = 9$ cm.
 - Aflați lungimile laturilor triunghiului MBD .
 - Aflați înălțimea din A a tetraedrului $MABD$.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c .
 - Aflați A_1B și A_1D , dacă $a = 6$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm.
 - Aflați înălțimea din A a tetraedrului A_1ABD .
- Fie un poliedru, f – numărul fețelor poliedrului, m – numărul muchiilor poliedrului, v – numărul vârfurilor și propoziția: $m = v + f - 2$. Verificați propoziția pentru:
 - un cub;
 - un paralelipiped dreptunghic;
 - o prismă triunghiulară;
 - o prismă hexagonală;
 - un tetraedru;
 - o piramidă patrulateră;
 - o piramidă pentagonală;
 - o piramidă hexagonală.

5. Suplimentar. Piramide regulate particulare. Relații între elemente

Piramida triunghiulară regulată. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$. Triunghiul ABC este echilateral, $AB = BC = AC = l$; $VA = VB = CV = m$; $O = \text{pr}_{(ABC)} V$, $VO = h$; $VD = VE = VF = a_p$; $OA = OB = OC = R$ – raza cercului circumscris; $OD = OE = OF = a_b = 0,5R$ – raza cercului înscris. $l = R\sqrt{3}$, $R = 0,(3)l\sqrt{3}$. Măsura unghiului $ODV = u_1$ este măsura unghiului format de fețele laterale cu planul bazei. Măsura unghiului $OCV = u_2$ este măsura unghiului format de muchiile laterale cu planul bazei. Unghiul AMC este unghi plan corespunzător unghiului diedru format de două fețe laterale. Se ține cont că triunghiul AMC este isoscel cu baza AC și triunghiul VAB are $AM \cdot m = a_p l$.

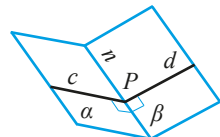
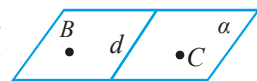
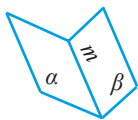


Piramida patrulateră regulată. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$. $ABCD$ este pătrat, $AB = BC = CD = AD = l$; $VA = VB = CV = VD = m$; $O = \text{pr}_{(ABCD)} V$, $VO = h$; $VE = VF = VG = VH = a_p$; $OA = OB = OC = OD = R$ – raza cercului circumscris pătratului $ABCD$; $OE = OF = OG = OH = a_b = 0,5l$ – raza cercului înscris. $l = R\sqrt{2}$, $R = 0,5l\sqrt{2}$. Măsura unghiului $OEV = u_1$ este măsura unghiului format de fețele laterale cu planul bazei. Măsura unghiului $OCV = u_2$ este măsura unghiului format de muchiile laterale cu planul bazei. Unghiul AMC este unghi plan corespunzător unghiului diedru format de două fețe laterale. Se ține cont că triunghiul AMC este isoscel cu baza AC și triunghiul VAD are $AM \cdot m = a_p l$.



Suplimentar. Teoreme de loc geometric

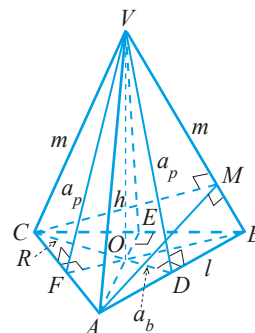
Unghi diedru. Dreapta d , conținută de planul α , determină semiplanele deschise cu frontiera d : $(dB$ și $(dC$. Figura geometrică formată de două semiplane cu frontiera comună este un **unghi diedru**. În desen unghiul diedru are muchia m (frontiera comună) și fețele α și β (semiplanele). Fie unghiul diedru cu muchia n și fețele α și β . Semidreptele c și d sunt perpendiculare pe dreapta n în P , $c \subset \alpha$ și $d \subset \beta$. Ele formează un **unghi plan al unghiului diedru**. Toate unghiurile plane ale unui unghi diedru sunt congruente.



■ Exerciții

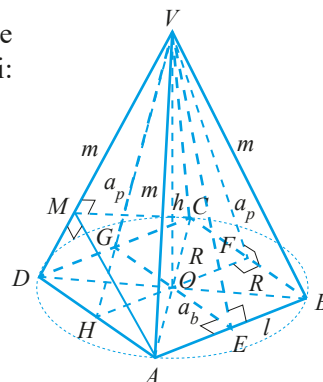
- $VABC$ este o piramidă regulată. Reprezentați triunghiurile dreptunghice care permit formularea relațiilor dintre elementele piramidei. Completați:
 - relația dintre h , a_p și a_b ;
 - relația dintre h , m și R ;
 - relația dintre m , a_p și $0,5l$.
- $VABC$ este o piramidă regulată. Copiați și completați tabelul:

l (cm)	h (cm)	a_p (cm)	a_b (cm)	m (cm)	R (cm)
				17	8
	35				12
26		84			
		65	33		



- $VABCD$ este o piramidă regulată. Reprezentați triunghiurile dreptunghice care permit formularea relațiilor dintre elementele piramidei. Completați:
 - relația dintre h , a_p și a_b ;
 - relația dintre h , m și R ;
 - relația dintre m , a_p și $0,5l$.
- $VABCD$ este o piramidă regulată. Copiați și completați tabelul:

l (cm)	h (cm)	a_p (cm)	a_b (cm)	m (cm)	R (cm)
				13	12
	40				9
56		45			
		61	60		



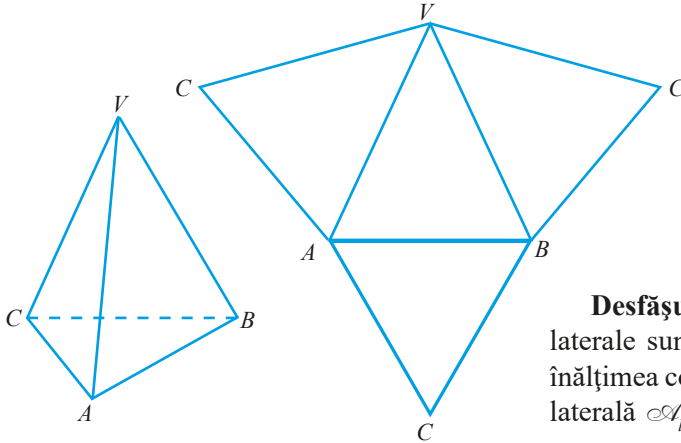
- $VABC$ este o piramidă regulată. Aflați cosinusul unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei piramidei, dacă:
 - $m = 2\sqrt{13}$ cm și $l = 12$ cm;
 - $h = 8$ cm și $R = 6$ cm;
 - $a_p = 20$ cm și $a_b = 10\sqrt{2}$ cm;
 - $h = 15\sqrt{3}$ cm și $a_b = 15$ cm.
- În condițiile ex. 5, aflați cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei piramidei.
- $VABCD$ este o piramidă regulată. Aflați cosinusul unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei piramidei, dacă:
 - $m = 20$ cm și $R = 12$ cm;
 - $h = 48$ cm și $R = 14$ cm;
 - $l = 40$ cm și $a_p = 21$ cm..
- În condițiile ex. 7, aflați cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei piramidei.
- În condițiile ex. 5, aflați cosinusul unghiului diedru format de două fețe laterale.
- În condițiile ex. 7, aflați cosinusul unghiului diedru format de două fețe laterale opuse.
- $VABCD$ este o piramidă regulată cu măsura unghiului diedru format de fețele laterale opuse de 60° și $a_b = 5$ cm. Aflați celelalte elemente ale piramidei.

6. Desfășurarea piramidei. Aria laterală. Aria totală

Desfășurarea tetraedrului regulat. Toate fețele tetraedrului regulat, inclusiv baza, sunt triunghiuri echilaterale cu laturile de lungimi l . Aria unui triunghi este $0,25l^2\sqrt{3}$. Aria laterală este $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale $= 3 \cdot 0,25l^2\sqrt{3} = 0,75l^2\sqrt{3}$. Aria bazei este $\mathcal{A}_b = 0,25l^2\sqrt{3}$. Aria totală este

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = l^2\sqrt{3}.$$

Desfășurarea piramidei triunghiulare regulate. Fețele



laterale sunt triunghiuri isoscele cu baza de lungime l și înălțimea corespunzătoare ei a_p (apotema piramidei). Aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale $=$ perimetrul bazei $\times$ apotema piramidei $: 2 = 0,5 \mathcal{P}_b \cdot a_p = 1,5la_p$. Aria bazei este: $\mathcal{A}_b = 0,25l^2\sqrt{3}$. Aria totală este: $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 1,5la_p + 0,25l^2\sqrt{3}$.

Desfășurarea prisme patrulater regulate. Fețele laterale sunt triunghiuri isoscele cu baza de lungime l și înălțimea corespunzătoare ei a_p (apotema piramidei). Aria laterală $\mathcal{A}_l =$ suma ariilor fețelor laterale $=$ perime-

trul bazei $\times$ apotema piramidei $: 2 = 0,5 \mathcal{P}_b \cdot a_p = 2la_p$. Aria bazei este: $\mathcal{A}_b = l^2$. Aria totală este: $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 2la_p + l^2$.

Aria laterală a unei piramide, $\mathcal{A}_l$, este suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.

Aria totală a piramidei este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b$.

Teoremă. 1) Aria laterală a unei piramide regulate este $\mathcal{A}_l = 0,5 \cdot \mathcal{P}_b \cdot a_p$. Aria totală a piramidei regulate este $\mathcal{A}_t = 0,5 \mathcal{P}_b \cdot a_p + \mathcal{A}_b$.

2) Tetraedrul regulat are $\mathcal{A}_l = 0,75 \cdot l^2\sqrt{3}$ și $\mathcal{A}_t = l^2\sqrt{3}$. 3) Piramida triunghiulară regulată are $\mathcal{A}_l = 1,5la_p$ și $\mathcal{A}_t = 1,5la_p + 0,25l^2\sqrt{3}$. 4) Piramida patrulateră regulată are $\mathcal{A}_l = 2la_p$ și $\mathcal{A}_t = 2la_p + 0,25l^2$.

Suplimentar. Teorema celor trei perpendiculare

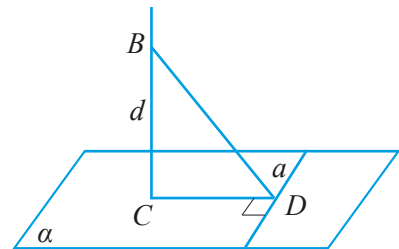
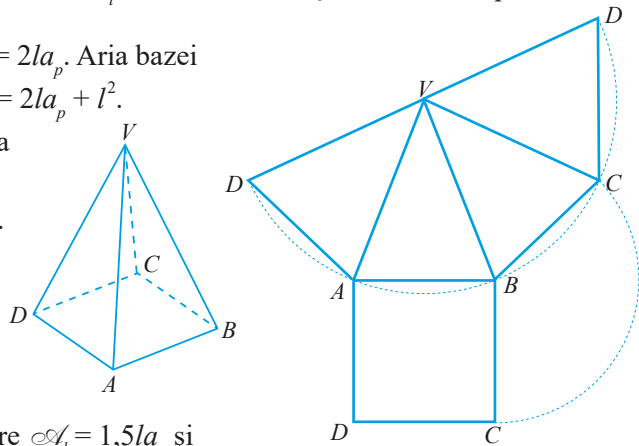
Teorema celor trei perpendiculare. Dacă $d \perp \alpha$, $C = \text{pr}_\alpha d$, $a \subset \alpha$, $D = \text{pr}_a C$, atunci $D = \text{pr}_a B$, unde B este un punct oarecare al dreptei d .

Teorema celor trei perpendiculare (Reciproca I). Dacă $B \notin \beta$, $d \perp \beta$, $B \in d$, $C = \text{pr}_\beta B$, $a \subset \beta$, $D = \text{pr}_a B$, atunci $D = \text{pr}_a C$.

Formularea reciprocei cu ajutorul distanțelor.

Dacă $B \notin \beta$, $BC = d(B, \beta)$ și $BD = d(B, a)$, $a \subset \beta$, atunci $CD = d(C, a)$.

Teorema celor trei perpendiculare (Reciproca II). Dacă $B \notin \beta$, $B \in d$, $a \subset \beta$, $C \in \beta$, $BC \perp CD$, $D = \text{pr}_a B$, $D = \text{pr}_a C$, atunci $d \perp \beta$.

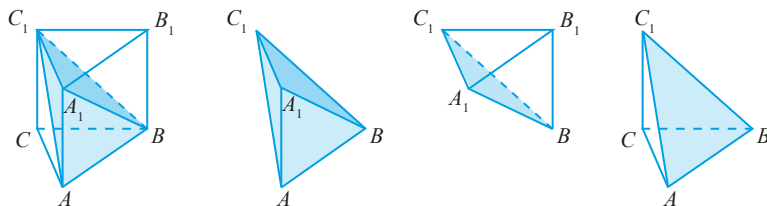


■ Exerciții

- $ABCD$ este un tetraedru regulat. Desfășurați tetraedrul cu:
a) $AB = 2$ cm; b) $AB = 3$ cm; c) $AB = 4$ cm.
- Aflați aria totală a tetraedrului regulat $ABCD$ cu:
a) $AB = 2$ cm; b) $AB = 3$ cm; c) $AB = 4$ cm; d) $AB = 5$ cm.
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Aria laterală a unei piramide ...
c) Aria laterală a unei piramide regulate este ...
b) Aria totală a piramidei ...
d) Aria totală a piramidei regulate ...
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Piramida triunghiulară regulată are $\mathcal{A}_l = \dots$ și $\mathcal{A}_t = \dots$
b) Piramida patrulateră regulată are $\mathcal{A}_l = \dots$ și $\mathcal{A}_t = \dots$
- $VABCD$ este o piramidă regulată. Desfășurați piramida, dacă:
a) $l = 2$ cm, $m = 2,5$ cm; b) $l = 2,5$ cm, $m = 3$ cm; c) $l = 3$ cm, $m = 3,5$ cm.
- $VABCD$ este o piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $l = 3$ cm și $a_p = 4$ cm; b) $l = 8$ cm și $a_p = 9$ cm; c) $l = 9$ cm și $a_p = 12$ cm; d) $l = 5$ cm și $a_p = 8$ cm.
- $VABC$ este o piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă: a) $l = 12$ cm și $a_p = 9$ cm;
b) $l = 14$ cm și $a_p = 12$ cm; c) $l = 11$ cm și $a_p = 15$ cm; d) $l = 6$ cm și $a_p = 10$ cm.
- $ABCDMNOP$ este un cub.
a) Aflați $\mathcal{A}_l$ a tetraedrului $MABD$, dacă $AB = 8$ cm.
b) Aflați $\mathcal{A}_l$ a tetraedrului $MABD$, dacă $AB = 10$ cm.
c) Aflați $\mathcal{A}_l$ a tetraedrului $MABD$, dacă $AB = 11$ cm.
d) Aflați $\mathcal{A}_l$ a tetraedrului $MABD$, dacă $AB = 12$ cm.
- $ABCDMNOP$ este cub și V este centrul pătratului $MNOP$. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $AB = 5$ cm; b) $AB = 8$ cm; c) $AB = 12$ cm; d) $AB = 15$ cm.
- Prisma $ABCA_1B_1C_1$ are fețele laterale pătrate. Pentru tetraedrul A_1ABC aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $AB = 12$ cm; b) $AB = 15$ cm; c) $AB = 18$ cm; d) $AB = 24$ cm.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un cub cu muchiile de lungime m și V este centrul feței $A_1 B_1 C_1 D_1$. Pentru piramida $VABCD$ aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă: a) $m = 12$ cm; b) $m = 15$ cm; c) $m = 18$ cm; d) $m = 25$ cm.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c . Pentru piramida $A_1 ABC$ aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $a = 16$ cm, $b = 16\sqrt{3}$ cm, $c = 16$ cm; b) $a = 12$ cm, $b = 12\sqrt{3}$ cm, $c = 12$ cm;
c) $a = 24$ cm, $b = 24\sqrt{3}$ cm, $c = 24$ cm; d) $a = 12$ cm, $b = 12\sqrt{3}$ cm, $c = 12$ cm.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c . Pentru piramida $A_1 ABCD$ aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 8$ cm; b) $a = 10$ cm, $b = 24$ cm, $c = 18$ cm;
c) $a = 16$ cm, $b = 30$ cm, $c = 11$ cm; d) $a = 14$ cm, $b = 48$ cm, $c = 25$ cm.
- $ABCA_1 B_1 C_1$ este o prismă regulată cu muchiile bazei de lungime a și înălțimea h . Pentru piramida $A_1 ABC$ aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $a = 16$ cm, $h = 30$ cm; b) $a = 9$ cm, $h = 40$ cm; c) $a = 11$ cm, $h = 60$ cm; d) $a = 13$ cm, $h = 84$ cm;
e) $a = 24$ cm, $h = 45$ cm; f) $a = 14$ cm, $h = 48$ cm; g) $a = 18$ cm, $h = 80$ cm; h) $a = 40$ cm, $h = 42$ cm.
- $VABCDEF$ este o piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $l = 10$ cm și $m = 13$ cm; b) $l = 16$ cm și $m = 17$ cm; c) $l = 22$ cm și $m = 61$ cm;
d) $m = 13$ cm și $a_b = 12\sqrt{3}$ cm; e) $m = 17$ cm și $a_b = 8\sqrt{3}$ cm; f) $m = 29$ cm și $a_b = 21\sqrt{3}$ cm.
- $VABCDEF$ este o piramidă cu înălțimea VA . Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_p$ dacă:
a) $l = 5$ cm și $VA = 12$ cm; b) $l = 36$ cm și $VA = 77$ cm; c) $l = 9$ cm și $VA = 40$ cm.

7. Volumul piramidei

Descompunerea prisme triunghiulare în tetraedre. Prisma dreaptă triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$ se descompune în tetraedrele: C_1ABA_1 , $C_1A_1BB_1$, C_1ABC .



Tetraedrul C_1ABA_1 poate fi considerat ca fiind piramida cu vârful C_1 și baza ABA_1 . Atunci, înălțimea sa este $d(C_1, (ABA_1))$. Tetraedrul $C_1A_1BB_1$ poate fi considerat ca fiind piramida cu vârful C_1 și baza A_1BB_1 . Atunci, înălțimea sa este $d(C_1, (A_1BB_1))$. Deoarece BAA_1B_1 este paralelogram (în particular, dreptunghi), rezultă că $\triangle ABA_1 \equiv \triangle B_1A_1B$ și $(ABA_1) = (A_1BB_1)$, de unde $d(C_1, (ABA_1)) = d(C_1, (A_1BB_1))$. Prin urmare, tetraedrele C_1ABA_1 și $C_1A_1BB_1$ sunt echivalente, (1).

Tetraedrul $C_1A_1BB_1$ poate fi considerat ca fiind piramida cu vârful B și baza $A_1B_1C_1$. Atunci, înălțimea sa este $d(B, (A_1B_1C_1))$. Tetraedrul C_1ABC poate fi considerat ca fiind piramida cu vârful C_1 și baza ABC . Atunci, înălțimea sa este $d(C_1, (ABC))$. $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$ deoarece triunghiurile bazelor prisme sunt congruente și $d(B, (A_1B_1C_1)) = d(C_1, (ABC)) =$ înălțimea prisme. Prin urmare, tetraedrele $C_1A_1BB_1$ și C_1ABC sunt echivalente, (2).

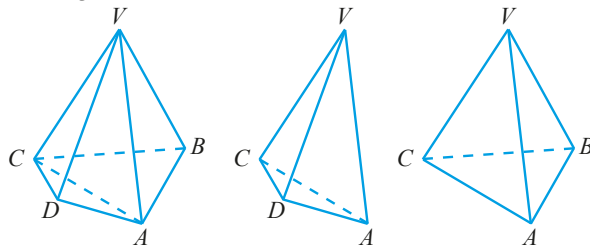
(1) și (2) implică: tetraedrele C_1ABA_1 , $C_1A_1BB_1$ și C_1ABC sunt echivalente. Prin urmare, volumul fiecăruia este a treia parte din volumul prisme $ABCA_1B_1C_1$.

Teorema volumului tetraedrului. Orice prismă triunghiulară se descompune în trei tetraedre echivalente.

Corolar. Volumul piramidei triunghiulare $VABC$ este $\frac{1}{3} h \mathcal{A}_{ABC}$ (o treime din produsul înălțimii cu aria bazei piramidei).

Volumul unei piramide. Piramida $VABCD$ se poate descompune în două piramide triunghiulare având aceeași înălțime. O variantă de descompunere este ilustrată în desen.

Rezultă că: volumul piramidei $ABCD =$ volumul piramidei $VADC$ + volumul piramidei

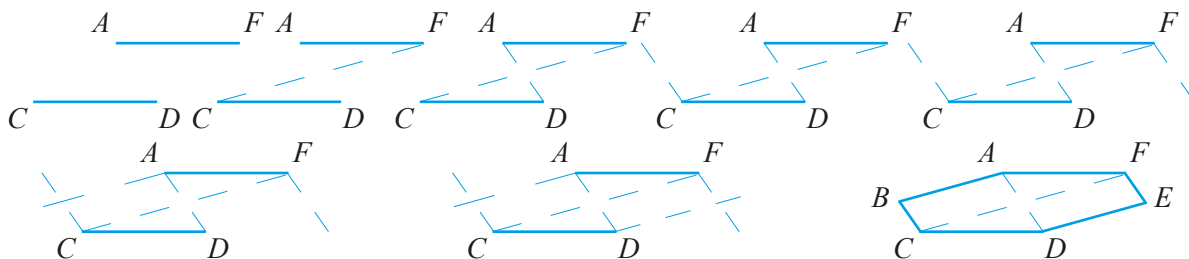


$$VABC = \frac{1}{3} h \mathcal{A}_{ADC} + \frac{1}{3} h \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{3} h (\mathcal{A}_{ADC} + \mathcal{A}_{ABC}) = \frac{1}{3} h \mathcal{A}_{ABCD}.$$

Analog se arată că orice piramidă se descompune în piramide triunghiulare cu aceeași înălțime și se obține un rezultat asemănător.

Teorema volumului piramidei. Volumul piramidei cu înălțimea h și aria bazei $\mathcal{A}_b$ este $\frac{1}{3} h \mathcal{A}_b$.

Reprezentarea hexagonului regulat în spațiu



■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Orice prismă triunghiulară se descompune ...
 - Volumul piramidei triunghiulare $VABC$...
 - Volumul piramidei cu înălțimea ... și aria bazei ...
- Aflați volumul piramidei cu înălțimea h și baza un pătrat cu laturile de lungime l , dacă:
 - $h = 5$ cm și $l = 6$ cm; b) $h = 12$ cm și $l = 4$ cm; c) $h = 15$ cm și $l = 7$ cm; d) $h = 16$ cm și $l = 8$ cm.
- Aflați volumul piramidei cu înălțimea h și baza un triunghi echilateral cu laturile de lungime l , dacă:
 - $h = 11$ cm și $l = 3$ cm; b) $h = 8$ cm și $l = 5$ cm; c) $h = 14$ cm și $l = 4$ cm; d) $h = 18$ cm și $l = 9$ cm.
- Aflați volumul piramidei cu înălțimea h și baza un hexagon regulat cu laturile de lungime l , dacă:
 - $h = 13$ cm și $l = 2$ cm; b) $h = 15$ cm și $l = 4$ cm; c) $h = 16$ cm și $l = 6$ cm; d) $h = 11$ cm și $l = 3$ cm.
- Aflați volumul piramidei cu înălțimea h și baza un paralelogram cu laturile de lungimi a , b și un unghi de măsură u , dacă:
 - $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $u = 45^\circ$ și $h = 15$ cm; b) $a = 4$ cm, $b = 9$ cm, $u = 30^\circ$ și $h = 18$ cm;
 - $a = 6$ cm, $b = 9$ cm, $u = 60^\circ$ și $h = 20$ cm; d) $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $u = 135^\circ$ și $h = 16$ cm.
- Aflați volumul piramidei cu înălțimea h și cu baza un romb cu diagonalele de lungimi d_1 și d_2 , dacă:
 - $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 12$ cm și $h = 21$ cm; b) $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 10$ cm și $h = 14$ cm;
 - $d_1 = 12$ cm, $d_2 = 7$ cm și $h = 13$ cm; d) $d_1 = 9$ cm, $d_2 = 11$ cm și $h = 91$ cm.
- Aflați volumul unei piramide patrulaterare regulate, dacă:
 - $m = 29$ cm și $R = 20$ cm; b) $l = 12$ cm și $a_p = 10$ cm; c) $m = 50$ cm și $l = 28$ cm.
- Aflați volumul unei piramide triunghiulare regulate, dacă:
 - $m = 36$ cm și $R = 9$ cm; b) $l = 8$ cm și $a_p = 12$ cm; c) $m = 28$ cm și $l = 12$ cm.
- Piramida $VABC$ are înălțimea VA și baza un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC . Aflați volumul piramidei cu:
 - $VA = 12$ cm, $AB = 4$ cm și $AC = 5$ cm; b) $VA = 21$ cm, $AB = 6$ cm și $AC = 12$ cm;
 - $VA = 18$ cm, $AB = 7$ cm și $AC = 13$ cm; d) $VA = 27$ cm, $AB = 8$ cm și $AC = 15$ cm.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a , b , c . Aflați volumul piramidei $A_1 ABCD$:
 - $a = 6$ cm, $b = 16$ cm, $c = 94$ cm; b) $a = 15$ cm, $b = 14$ cm, $c = 21$ cm;
 - $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 73$ cm; d) $a = 17$ cm, $b = 18$ cm, $c = 303$ cm.
- Piramida $VABCD$ are muchiile laterale congruente și baza un dreptunghi. Aflați volumul piramidei, dacă:
 - $VA = 36$ cm, $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm; b) $VA = 25$ cm, $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm;
 - $VA = 24$ cm, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm; d) $VA = 36$ cm, $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm.
- Piramida regulată $VABCD$ cu VAC triunghi echilateral cu laturile de lungime l . Aflați volumul piramidei, dacă: a) $l = 15$ cm; b) $l = 15$ cm; c) $l = 24$ cm.
- Aflați volumul piramidei regulate $VABC$ cu:
 - $AB = 6$ cm și unghiul format de o față laterală cu planul bazei de 60° ;
 - $AB = 12$ cm și unghiul format de o față laterală cu planul bazei de 30° ;
 - $AB = 18$ cm și unghiul format de o față laterală cu planul bazei de 45° ;
- Piramida $VABCD$ are baza un trapez cu $AD = DC = BC = 6$ cm și $AB = 12$ cm. Aflați volumul piramidei, dacă muchiile laterale ale piramidei sunt congruente și $VA = 10$ cm.
- Piramida $VABC$ are înălțimea VA . VBC triunghi echilateral, iar ABC este triunghi dreptunghic cu unghiul drept A . Aflați volumul piramidei, dacă $AB = 6$ cm.
- Aflați volumul unui tetraedru regulat cu muchiile de: a) 12 cm; b) 15 cm; c) 8 cm.

Sinteză

- $ABCD$ este un tetraedru regulat. Desfășurați tetraedrul, dacă: a) $AB = 2,5$ cm; b) $AB = 3,5$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile:
a) 15 cm, 18 cm, 12 cm; b) 9 cm, 16 cm, 11 cm; c) 14 cm, 15 cm, 16 cm; d) 13 cm, 11 cm, 17 cm.
- Desfășurați piramida regulată $VABCD$, dacă: a) $m = 3,5$ cm și $l = 5$ cm; b) $m = 4$ cm și $l = 5,5$ cm.

- $VABC$ este o piramidă regulată.

Copiați și completați tabelul:

l (cm)	h (cm)	a_p (cm)	a_b (cm)	m (cm)	R (cm)
66				65	
	20				$5\sqrt{3}$

- $VABCD$ este o piramidă regulată.

Copiați și completați tabelul:

l (cm)	h (cm)	a_p (cm)	a_b (cm)	m (cm)	R (cm)
	15		8		
56				53	

- Pentru piramida regulată $VABC$ de la ex. 4 aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$.
- Pentru piramida regulată $VABCD$ de la ex. 5 aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$.
- Piramida $VABCD$ are baza un dreptunghi cu dimensiunile a și b . Muchiile laterale sunt congruente. Aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $a = 40$ cm, $b = 16$ cm și $VA = 29$ cm; b) $a = 30$ cm, $b = 16$ cm și $VA = 17$ cm.
- Piramida $VABCD$ are baza un romb cu înălțimea VO , O – intersecția diagonalelor rombului. Aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $AC = 16$ cm, $BD = 30$ cm și $VB = 39$ cm; b) $AC = 14$ cm, $BD = 48$ cm și $VB = 30$ cm.
- Prisma $ABCA_1B_1C_1$ are fețele laterale pătrate. Pentru tetraedrul A_1ABC aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $AB = 24$ cm; b) $AB = 28$ cm; c) $AB = 30$ cm; d) $AB = 32$ cm.
- $ABCDMNOP$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a , b , c . Veste centrul dreptunghiului $MNOP$. Pentru piramida $VABCD$ aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $a = 10$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm; b) $a = 14$ cm, $b = 14$ cm, $c = 24$ cm.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a , b , c . Pentru piramida $A_1 ABCD$ aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm; b) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 24$ cm.
- Piramida $VABC$ are înălțimea VA și baza un triunghi echilateral. Aflați $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{V}$, dacă:
a) $VA = 24$ cm și $AC = 10$ cm; b) $VA = 40$ cm și $AC = 9$ cm.
- Piramida $VABCD$ cu înălțimea VA are baza un romb. Aflați $\mathcal{V}$, dacă:
a) $AC = 12$ cm, $VA = 15$ cm și $m(\angle BAC) = 120^\circ$;
b) $AC = 18\sqrt{3}$ cm, $VA = 12$ cm și $m(\angle BAC) = 60^\circ$
- Piramida $VABCD$ are baza un trapez înscris într-un cerc cu diametru AB . Muchiile laterale ale piramidei sunt congruente. Aflați $\mathcal{V}$, dacă:
a) $AD = 16$ cm, $BD = 16\sqrt{3}$ cm și VA formează cu planul bazei un unghi de 60° ;
b) $AD = 18$ cm, $BD = 18\sqrt{3}$ cm și VA formează cu planul bazei un unghi de 30° ;
c) $AD = 21$ cm, $BD = 21\sqrt{3}$ cm și VA formează cu planul bazei un unghi de 45° .

Evaluare

I

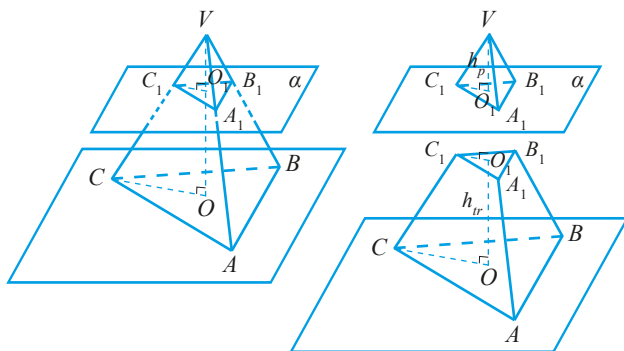
1. Desfășurați un tetraedru regulat cu muchiile de 2,7 cm. 10
2. Aflați volumul unei piramide cu baza un pătrat cu laturile de 15 cm și înălțimea piramidei de 18 cm. 10
3. Aflați volumul unei piramide cu baza un triunghi echilateral cu laturile de 12 cm și înălțimea piramidei de 20 cm. 20
4. O piramidă patrulateră regulată are $h = 12$ cm și $a_b = 5$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.
5. O piramidă triunghiulară regulată are $l = 24$ cm și $m = 37$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.
6. Piramida $VABCD$ are baza un dreptunghi. Muchiile laterale sunt congruente. $VA = 68$ cm, $AB = 64$ cm, $BC = 120$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.

II

1. Desfășurați un tetraedru regulat cu muchiile de 3,2 cm. 10
2. Aflați volumul unei piramide cu baza un pătrat cu laturile de 16 cm și înălțimea piramidei de 21 cm. 10
3. Aflați volumul unei piramide cu baza un triunghi echilateral cu laturile de 8 cm și înălțimea piramidei de 15 cm. 20
4. O piramidă patrulateră regulată are $h = 15$ cm și $a_b = 8$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.
5. O piramidă triunghiulară regulată are $l = 18$ cm și $m = 41$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.
6. Piramida $VABCD$ are baza un dreptunghi. Muchiile laterale sunt congruente. $VA = 37$ cm, $AB = 70$ cm, $BC = 24$ cm. Aflați: 20
 - a) aria laterală a piramidei;
 - b) aria totală a piramidei;
 - c) volumul piramidei.



8. Trunchiul de piramidă. Elemente. Clasificare



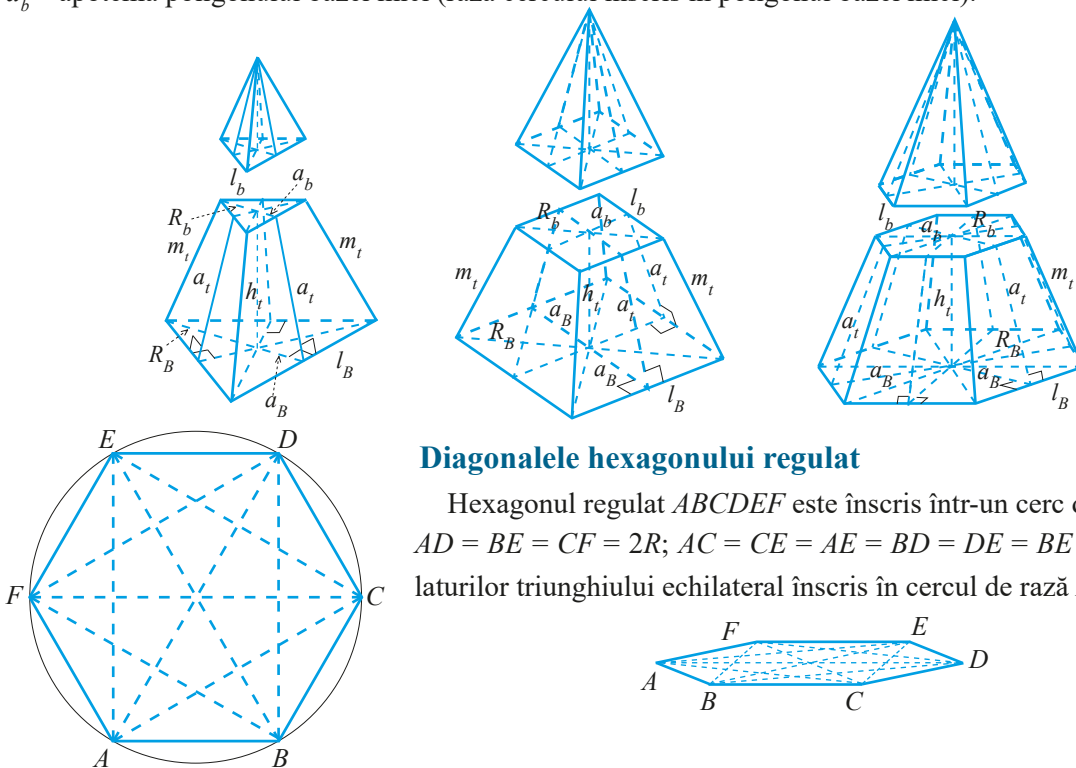
Intersectând piramida $VABC$ cu planul $\alpha \parallel (ABC)$ se obține $ABCA_1B_1C_1$ un trunchi de piramidă de înălțime h_t și piramida $VA_1B_1C_1$ de înălțime h_p . Piramida inițială și noua piramidă sunt asemenea și coeficientul lor de asemănare este egal cu raportul înălțimilor lor. Bazele celor două piramide sunt bazele trunchiului de piramidă.

Înălțimea trunchiului de piramidă este distanța de la un punct al planului bazei mici până la planul bazei mari (distanța de la punct la proiecția sa pe planul bazei mari).

Trunchiul de piramidă regulată rezultă prin intersectarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu planul bazei. Bazele trunchiului de piramidă sunt poligoane regulate cu același număr de laturi (triunghiuri echilaterale, pătrate, pentagoane regulate, hexagoane regulate etc.) și muchiile lui laterale sunt congruente.

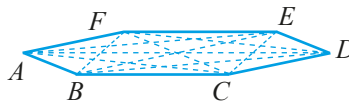
Teoremă. Trunchiul de piramidă ce provine dintr-o piramidă regulată are muchiile congruente și dreapta determinată de centrele cercurilor circumscrise poligoanelor bazelor trunchiului este perpendiculară pe planele bazelor. Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente.

Elementele unui trunchi de piramidă regulată: h_t – înălțimea este segmentul determinat de centrele bazelor trunchiului; l_B – lungimea muchiilor bazei mari; l_b – lungimea muchiilor bazei mici; R_B – raza cercului circumscris bazei mari a trunchiului de piramidă; R_b – raza cercului circumscris bazei mici a trunchiului de piramidă; a_t – apotema trunchiului de piramidă (înălțimea unei fețe laterale este înălțimea unui trapez isoscel); a_B – apotema poligonului bazei mari (raza cercului înscris în poligonul bazei mari); a_b – apotema poligonului bazei mici (raza cercului înscris în poligonul bazei mici).



Diagonalele hexagonului regulat

Hexagonul regulat $ABCDEF$ este înscris într-un cerc de rază R . $AD = BE = CF = 2R$; $AC = CE = AE = BD = DE = BE =$ lungimea laturilor triunghiului echilateral înscris în cercul de rază $R = R\sqrt{3}$.



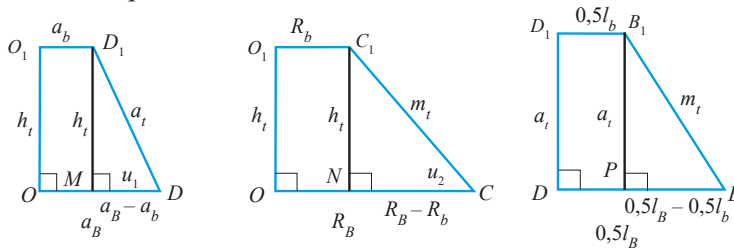
■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Înălțimea trunchiului de piramidă este ...
 - Trunchiul de piramidă regulată rezultă prin intersectarea ...
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Trunchiul de piramidă ce provine dintr-o piramidă regulată are ...
 - Fetele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată ...
- Copiați și completați semnificațiile notațiilor:
 - $h_t - \dots$; b) $l_b - \dots$; c) $l_b - \dots$; d) $R_b - \dots$; e) $R_b - \dots$; f) $a_t - \dots$; g) $a_b - \dots$; h) $a_b - \dots$
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Trunchiul de piramidă $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$...
 - Înălțimea trunchiului de piramidă $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$...
 - Trunchiul de piramidă $ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$...
 - Înălțimea trunchiului de piramidă $ABCDE A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$...
- Reprezentați un trunchi de piramidă triunghiulară și notați elementele trunchiului pe desen.
- Reprezentați un trunchi de piramidă patrulateră și notați elementele trunchiului pe desen.
- $ABCA_1 B_1 C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Recunoașteți elementele trunchiului care sunt elemente ale patrulaterului:
 - $ABB_1 A_1$; b) $ADD_1 A_1$, unde D este mijlocul $[BC]$, iar D_1 este mijlocul $[B_1 C_1]$.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Recunoașteți elementele trunchiului care sunt elemente ale patrulaterului:
 - $ABB_1 A_1$; b) $ACC_1 A_1$; c) $EFF_1 E_1$, unde E este mijlocul $[AB]$, F este mijlocul $[CD]$, E_1 este mijlocul $[A_1 B_1]$, iar F_1 este mijlocul $[C_1 D_1]$.
- Reprezentați un trunchi de piramidă hexagonală regulată și notați elementele trunchiului pe desen.
- $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Recunoașteți elementele trunchiului care sunt elemente ale patrulaterului:
 - $ABB_1 A_1$; b) $ACC_1 A_1$; c) $ADD_1 A_1$; d) $AEE_1 A_1$; e) $GHH_1 G_1$, unde G este mijlocul $[AB]$, H este mijlocul $[DE]$, G_1 este mijlocul $[A_1 B_1]$, iar H_1 este mijlocul $[D_1 E_1]$.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Enumerați patrulateralele care se obțin prin intersectarea trunchiului cu un plan care conține înălțimea trunchiului și una dintre diagonalele lui $ABCD$.
- Fie trunchiul de piramidă regulată $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Enumerați patrulateralele care se obțin prin intersectarea trunchiului cu un plan care conține înălțimea trunchiului și una dintre diagonalele lui $ABCDEF$.
- Aflați aria unuia dintre patrulateralele construite în ex. 11, dacă:
 - $h_t = 7\sqrt{3}$ cm, $AC = 14$ cm și un unghi are 60° ;
 - $h_t = 14$ cm, $AC = 28$ cm și un unghi are 30° ;
 - $h_t = 18$ cm, $AC = 18\sqrt{2}$ cm și un unghi are 45° .
- Aflați aria unuia dintre patrulateralele construite în ex. 12, dacă:
 - $h_t = 15$ cm, $AC = 15\sqrt{2}$ cm și un unghi are 45° ;
 - $h_t = 24$ cm, $AC = 48$ cm și un unghi are 30° ;
 - $h_t = 16\sqrt{3}$ cm, $AC = 32$ cm și un unghi are 60° .

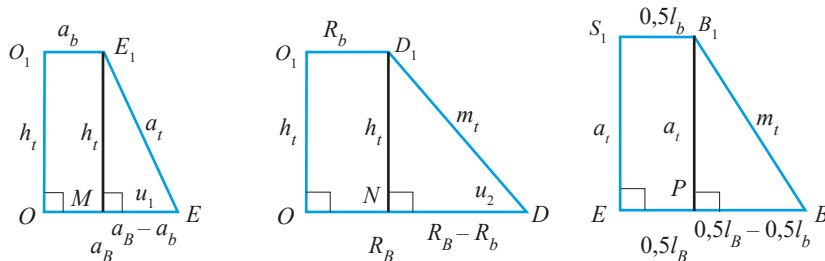
9. Relații între elementele trunchiului de piramidă regulată. Facultativ

Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată. Fie trunchiul de piramidă regulată $ABCA_1B_1C_1$. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt echilaterale cu $AB = l_B$ și $A_1B_1 = l_b$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = m_t$; O și O_1 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$, $OO_1 = h_t$; $DD_1 = EE_1 = FF_1 = a_t$; $OA = OB = OC = R_B$; $OD = OE = OF = a_b = 0,5R_B$. $l_B = R_B\sqrt{3}$, $R_B = 0,(3)l_B\sqrt{3}$; $O_1D_1 = O_1E_1 = O_1F_1 = a_b = 0,5R_b$, $l_b = R_b\sqrt{3}$, $R_b = 0,(3)l_b\sqrt{3}$.

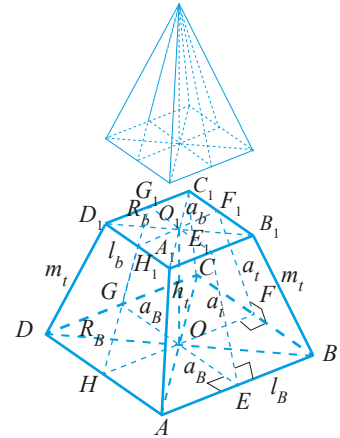
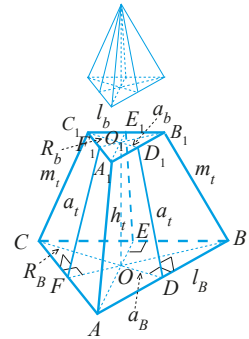
Măsura unghiului $ODD_1 = u_1$ este măsura unghiului format de fețele laterale cu planul bazei mari. Măsura unghiului $OCC_1 = u_2$ este măsura unghiului format de muchiile laterale cu planul bazei mari.



Trunchiul de piramidă patrulateră regulată. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A_1B_1C_1D_1$. $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ sunt pătrate, $AB = l_B$ și $A_1B_1 = l_b$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = m_t$; O și O_1 sunt centrele cercurilor circumscrise pătratelor $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$, $OO_1 = h_t$; $EE_1 = FF_1 = GG_1 = HH_1 = a_t$; $OA = OB = OC = OD = R_B$; $OE = OF = OG = OH = a_b = 0,5l_B$. $l_B = R_B\sqrt{2}$, $R_B = 0,5l_B\sqrt{2}$; $O_1E_1 = O_1F_1 = O_1G_1 = O_1H_1 = a_b = 0,5R_b$. $l_b = R_b\sqrt{2}$, $R_b = 0,5l_b\sqrt{2}$. Măsura unghiului $ODD_1 = u_1$ este măsura unghiului format de fețele laterale cu planul bazei mari. Măsura unghiului $OCC_1 = u_2$ este măsura unghiului format de muchiile laterale cu planul bazei mari.



Teoremă. Relații între elementele trunchiului de piramidă regulată: h_t și $a_b - a_b$ sunt lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime a_t ; h_t și $R_B - R_b$ sunt lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime m_t ; a_t și $0,5l_B - 0,5l_b$ sunt lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime m_t .



■ Exerciții

1. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Reprezentați triunghiurile dreptunghice care permit formularea relațiilor dintre elementele trunchiului.

Completați:

- a) relația dintre h_t , a_t și $x = a_B - a_b$; b) relația dintre h_t , m_t și $y = R_B - R_b$;
c) relația dintre m_t , a_t și $z = 0,5l_B - 0,5l_b$.
2. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată.
Copiați, completați tabelul și aflați l_B :

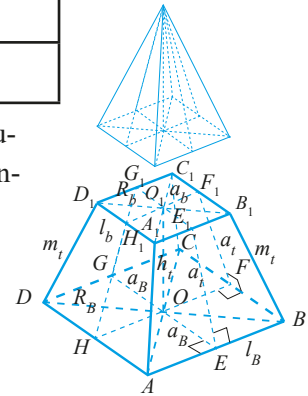
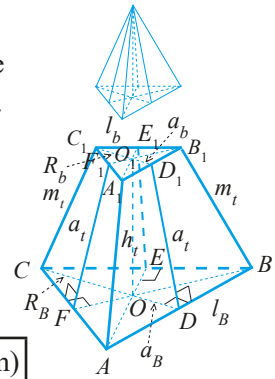
l_b (cm)	$(l_B - l_b)$ (cm)	h_t (cm)	a_t (cm)	$(a_B - a_b)$ (cm)	m_t (cm)	$(R_B - R_b)$ (cm)
18	20				26	
12		8	10			
6	80		58			
12		12			13	

3. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Reprezentați triunghiurile dreptunghice care permit formularea relațiilor dintre elementele trunchiului. Completați:

- a) relația dintre h_t , a_t și $x = a_B - a_b$; b) relația dintre h_t , m_t și $y = R_B - R_b$;
c) relația dintre m_t , a_t și $z = 0,5l_B - 0,5l_b$.
4. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată.
Copiați, completați tabelul și aflați l_B :

l_b (cm)	$(l_B - l_b)$ (cm)	h_t (cm)	a_t (cm)	$(a_B - a_b)$ (cm)	m_t (cm)	$(R_B - R_b)$ (cm)
16	24				20	
12		48			50	
20	40		21			
4		9			15	

5. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați cosinusul unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei trunchiului, dacă: a) $a_t = 15$ și $h_t = 12$; b) $a_t = 12$ și $h_t = 9$; c) $a_t = 19$ și $h_t = 11$.
6. În condițiile ex. 5, aflați cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei mari a trunchiului de piramidă regulată.
7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați cosinusul unghiului format de planul unei fețe laterale cu planul bazei trunchiului, dacă:
a) $a_t = 21$ și $h_t = 15$; b) $a_t = 25$ și $h_t = 16$; c) $a_t = 18$ și $h_t = 14$; d) $a_t = 31$ și $h_t = 24$.
8. În condițiile ex. 7, aflați cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei mari a trunchiului de piramidă regulată.
9. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Trapezul ACC_1A_1 are înălțimea 6 cm, $AC = 14\sqrt{3}$ cm și unghiul A de 60° . Aflați elementele necunoscute ale trunchiului de piramidă.



10. Desfășurarea trunchiului de piramidă. Aria laterală. Aria totală (Facultativ)

Desfășurarea trunchiului de piramidă triunghiulară regulată. Fețele laterale ale trunchiului sunt trapeze isoscele cu bazele de lungimi l_b, l_B , iar înălțimile a_t . Aria laterală $\mathcal{A}_l$ = suma ariilor fețelor laterale = (perimetrul bazei mari + perimetrul bazei mici) $\times$ apotema trunchiului : 2 = $0,5(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t$ = $1,5(l_B + l_b)a_t$. Ariile bazelor trunchiului de piramidă sunt $\mathcal{A}_B = 0,25(l_B)^2\sqrt{3}$ și $\mathcal{A}_b = 0,25(l_b)^2\sqrt{3}$. Aria totală a trunchiului de piramidă este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = 1,5(l_B + l_b)a_t + 0,25(l_B)^2\sqrt{3} + 0,25(l_b)^2\sqrt{3}$.

Desfășurarea trunchiului de piramidă patrulateră regulată. Fețele laterale ale trunchiului sunt trapeze isoscele cu bazele de lungimi l_b și l_B , cu înălțimile a_t . Aria laterală $\mathcal{A}_l$ = (perimetrul bazei mari + perimetrul bazei mici) $\times$ apotema trunchiului : 2 = $0,5(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t$ = $2(l_B + l_b)a_t$. Ariile bazelor trunchiului de piramidă sunt $\mathcal{A}_B = (l_B)^2$ și $\mathcal{A}_b = (l_b)^2$. Aria totală a trunchiului de piramidă este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = 2(l_B + l_b)a_t + (l_B)^2 + (l_b)^2$.

Aria laterală a unui trunchi de piramidă, $\mathcal{A}_l$, este suma ariilor fețelor laterale ale trunchiului de piramidă. **Aria totală** a trunchiului de piramidă este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$.

Teoremă. 1) Aria laterală a unei piramide regulate este $\mathcal{A}_l = 0,5(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t$. Aria totală a trunchiului de piramidă regulată este $\mathcal{A}_t = 0,5(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$.

2) Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată are ariile

$$\mathcal{A}_l = 1,5(l_B + l_b)a_t \text{ și } \mathcal{A}_t = 1,5(l_B + l_b)a_t + 0,25(l_B)^2\sqrt{3} + 0,25(l_b)^2\sqrt{3}.$$

3) Trunchiul de piramidă patrulateră regulată are ariile

$$\mathcal{A}_l = 2(l_B + l_b)a_t \text{ și } \mathcal{A}_t = 2(l_B + l_b)a_t + (l_B)^2 + (l_b)^2.$$

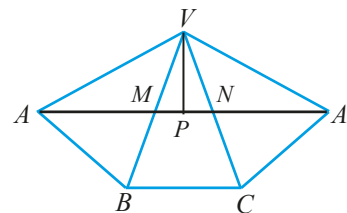
Problemă rezolvată

O omidă se deplasează pe toate fețele laterale ale unei piramide regulate $VABC$ cu muchiile laterale de 20 cm, din vârful A și ajunge din nou în A , astfel încât traiectoria are lungimea minimă.

- Descrieți traiectoria și aflați lungimea ei.
- Marcați intersecțiile traiectoriei cu muchiile: VB, CV .
- Aflați distanța de la vârful V până la traiectorie.

Rezolvare. În desen este reprezentată suprafața laterală a cubului. $VABC$. Cea mai scurtă traiectorie este un segment.

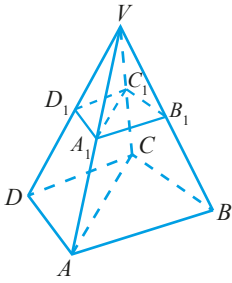
- Traietoria este segmentul $AA = 2 \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}$ cm.
- punctele M, N .
- Distanța de la V până la traiectorie este VP . $VP = VA : 2 = 10$ cm.



■ Exerciții

- $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Desfășurați trunchiul de piramidă regulată, care se obține din tetraedrul regulat $VABCD$ cu:
 - $AB = 4$ cm, dacă $AA_1 = 2$ cm;
 - $AB = 5$ cm, dacă $AA_1 = 2,5$ cm;
 - $AB = 6$ cm, dacă $AA_1 = 3$ cm;
 - $AB = 8$ cm, dacă $AA_1 = 4$ cm.
- Copiați și completați propozițiile adevărate;
 - Aria laterală a unui trunchi de piramidă ...
 - Aria totală a trunchiului de piramidă ...
 - Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată este ...
 - Aria totală a unui trunchi de piramidă regulată ...
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată are $\mathcal{A}_l = \dots$ și $\mathcal{A}_t = \dots$
 - Trunchiul de piramidă patrulateră regulată are $\mathcal{A}_l = \dots$ și $\mathcal{A}_t = \dots$
- $ABCA_1B_1C_1$ este un tetraedru regulat. Aflați raportul dintre aria laterală a tetraedrului și a trunchiului de piramidă pentru fiecare dintre situațiile de la ex. 1.
- Aflați aria totală a trunchiului de piramidă care se obține dintr-un tetraedru regulat la ex. 1.
- Aflați raportul dintre aria totală a tetraedrului și aria totală a trunchiului de piramidă care se obține dintr-un tetraedru regulat la ex. 1.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă ce se obține din piramida regulată $VABCD$ cu $[VA] \equiv [AB]$. Desfășurați trunchiul de piramidă cu:
 - $AB = 4$ cm și $AA_1 = 2$ cm;
 - $AB = 5$ cm și $AA_1 = 2,5$ cm;
 - $AB = 6$ cm și $AA_1 = 3$ cm;
 - $AB = 8$ cm și $AA_1 = 4$ cm.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă ce se obține din piramida regulată $VABCD$ cu $[VA] \equiv [AB]$. Aflați raportul:
 - ariilor laterale ale piramidei și trunchiului de piramidă de la ex. 7;
 - ariilor totale ale piramidei și trunchiului de piramidă de la ex. 7.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$, dacă:
 - $l_B = 6$ cm, $l_b = 2$ cm și $a_t = 4$ cm;
 - $l_B = 12$ cm, $l_b = 4$ cm și $a_t = 5$ cm;
 - $l_B = 13$ cm, $l_b = 4$ cm și $a_t = 6$ cm;
 - $l_B = 15$ cm, $l_b = 8$ cm și $a_t = 9$ cm.
- $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$, dacă:
 - $l_B = 10$ cm, $l_b = 3$ cm și $a_t = 7$ cm;
 - $l_B = 15$ cm, $l_b = 2$ cm și $a_t = 12$ cm;
 - $l_B = 16$ cm, $l_b = 6$ cm și $a_t = 8$ cm;
 - $l_B = 21$ cm, $l_b = 12$ cm și $a_t = 8$ cm.
- $VABC$ este o piramidă cu ABC triunghi echilateral și înălțimea VA . $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă ce se obține din piramidă. Aflați $\mathcal{A}_t$, dacă:
 - $AB = 8$ cm, $VA = 12$ cm și $AA_1 = 6$ cm;
 - $AB = 9$ cm, $VA = 14$ cm și $AA_1 = 7$ cm;
 - $AB = 6$ cm, $VA = 16$ cm și $AA_1 = 8$ cm;
 - $AB = 5$ cm, $VA = 18$ cm și $AA_1 = 9$ cm.
- $VABC$ este o piramidă cu ABC triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC și înălțimea piramidei este VA . $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă ce se obține din piramida $VABC$. Aflați $\mathcal{A}_t$, dacă:
 - $AB = 12$ cm, $VA = 24$ cm și $AA_1 = 8$ cm;
 - $AB = 16$ cm, $VA = 26$ cm și $AA_1 = 13$ cm;
 - $AB = 4$ cm, $VA = 15$ cm și $AA_1 = 9$ cm;
 - $AB = 8$ cm, $VA = 12$ cm și $AA_1 = 4$ cm.
- $VABCD$ este o piramidă cu $ABCD$ pătrat și înălțimea piramidei este VA . Din piramida $VABCD$ se obține $ABCD A_1B_1C_1D_1$ un trunchi de piramidă. Aflați $\mathcal{A}_t$, dacă:
 - $AB = 9$ cm, $VA = 16$ cm și $AA_1 = 8$ cm;
 - $AB = 7$ cm, $VA = 24$ cm și $AA_1 = 12$ cm;
 - $AB = 11$ cm, $VA = 28$ cm și $AA_1 = 14$ cm;
 - $AB = 3$ cm, $VA = 30$ cm și $AA_1 = 15$ cm.
- $VABCD$ este o piramidă cu $ABCD$ romb și înălțimea piramidei este VA . Din piramida $VABCD$ se obține trunchiul de piramidă $ABCD A_1B_1C_1D_1$ prin intersectarea ei cu un plan paralel cu (ABC) la distanța de $0,6)VA$. Aflați $\mathcal{A}_t$, dacă $AC = 24$ cm, $BD = 10$ cm, $VA = 15$ cm.

11. Volumul trunchiului de piramidă (Facultativ)



Piramide asemenea. Fie piramida $VABCD$. Un plan paralel cu planul bazei intersectează muchiile laterale VA, VB, CV, VD respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1 . Se obțin perechile de tetraedre asemenea: $VABC$ și $VA_1B_1C_1$; $VACD$ și $VA_1C_1D_1$.

Pentru cele două perechi de tetraedre asemenea coeficientul de asemănare este $\frac{d(V, (ABC))}{d(V, (A_1B_1C_1))} = k$. Prin urmare, piramidele $VABCD$ și $VA_1B_1C_1D_1$ se descompun în tetraedre respectiv asemenea. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare:

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1}} = \frac{\mathcal{A}_{ACD}}{\mathcal{A}_{A_1C_1D_1}} = \frac{\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD}}{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1} + \mathcal{A}_{A_1C_1D_1}} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}} = k^2, (1). \text{ Rezultă că } \frac{d(V, (ABC))}{d(V, (A_1B_1C_1))} \cdot \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\mathcal{V}_{VABCD}}{\mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1}} = k^3, (2). \text{ În plus, } \frac{\mathcal{V}_{VAB}}{\mathcal{V}_{VA_1B_1}} = \frac{\text{Suma ariilor fețelor } VABC}{\text{Suma ariilor fețelor } VA_1B_1C_1} = k^2.$$

Piramide asemenea. Două piramide sunt asemenea, dacă ele se descompun în tetraedre asemenea având același coeficient de asemănare.

Teoremă. Raportul ariilor bazelor a două piramide asemenea = raportul ariilor lor laterale = raportul ariilor lor totale = pătratul coeficientului de asemănare. Raportul volumelor a două piramide asemenea = cubul coeficientului lor de asemănare.

Volumul trunchiului de piramidă este: $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_{VABCD} - \mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1}, (3).$

$$(3) \text{ implică: } \frac{\mathcal{V}_{VABCD} - \mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1}}{\mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1}} = k^3 - 1, \text{ de unde } \mathcal{V}_t = (k^3 - 1) \mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1}, (4).$$

$$\mathcal{V}_{VABCD} = \frac{1}{3} h \mathcal{A}_{ABCD}; \mathcal{V}_{VA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} h_1 \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}; h_t = (k - 1)h_1, (5). h = d(V, (ABC)), h_1 = d(V, (A_1B_1C_1)).$$

$$(4) \text{ și } (5) \text{ implică: } \mathcal{V}_t = \frac{1}{3} h_t (k^2 + k + 1) \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}, (6).$$

$$(1) \text{ implică: } \mathcal{A}_{ABCD} = k^2 \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}, k \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1} = \sqrt{\mathcal{A}_{ABCD} \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}}, (7).$$

$$(6) \text{ și } (7) \text{ implică: } \mathcal{V}_t = \frac{1}{3} h_t (\mathcal{A}_{ABCD} + \sqrt{\mathcal{A}_{ABCD} \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}} + \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}).$$

Se ține cont că $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_B$ și $\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1} = \mathcal{A}_b$. Rezultă că: $\mathcal{V}_t = 0, (3) h_t (\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b).$

Teoremă. Volumul trunchiului de piramidă cu înălțimea h_t și ariile bazelor $\mathcal{A}_B$ și $\mathcal{A}_b$ este:

$$\mathcal{V}_t = \frac{1}{3} h_t (\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b).$$

Problemă rezolvată

O furnică se deplasează pe toate fețele laterale ale unui cub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu muchiile de 8 cm, din vârful A până în A_1 , astfel încât traiectoria are lungimea minimă.

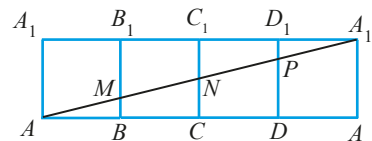
- Descrieți traiectoria și aflați lungimea ei.
- Marcați intersecțiile traiectoriei cu muchiile: BB_1, CC_1, DD_1 .
- Aflați distanța de la fiecare acest punct până la planul (ABC) .

Rezolvare. În desen este reprezentată suprafața laterală a cubului.

$AA_1 A_1 A$.

- Traectoria este diagonala $AA_1 = 8\sqrt{2}$ cm. b) punctele M, N, P .

$$c) \Delta AMB \sim \Delta AA_1 A \text{ (Conform TFA)} \Rightarrow \frac{MB}{AA_1} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}. \text{ Rezultă: } MB = 2 \text{ cm; } NC = 4 \text{ cm; } PD = 6 \text{ cm.}$$



■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Două piramide sunt asemenea dacă ...
 - Raportul ariilor bazelor a două piramide asemenea = ...
 - Volumul trunchiului de piramidă ...
- O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați aria totală a piramidei obținute, dacă:
 - aria totală a piramidei este $1\,236\text{ cm}^2$ și noua piramidă are înălțimea $0,5h$;
 - aria totală a piramidei este $5\,310\text{ cm}^2$ și noua piramidă are înălțimea $0,(3)h$;
 - aria totală a piramidei este 384 cm^2 și noua piramidă are înălțimea $0,25h$;
 - aria totală a piramidei este $5\,200\text{ cm}^2$ și noua piramidă are înălțimea $0,1h$.
- O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați volumul trunchiului de piramidă care se obține, dacă:
 - volumul piramidei este $2\,568\text{ cm}^3$ și noua piramidă are înălțimea $0,5h$;
 - volumul piramidei este $1\,512\text{ cm}^3$ și noua piramidă are înălțimea $0,(3)h$;
 - volumul piramidei este 960 cm^3 și noua piramidă are înălțimea $0,25h$;
 - volumul piramidei este $3\,000\text{ cm}^3$ și noua piramidă are înălțimea $0,1h$.
- Un trunchi de piramidă s-a obținut dintr-un tetraedru regulat. Aflați volumul tetraedrului, dacă:
 - volumul trunchiului de piramidă este 84 cm^3 și înălțimea lui este $0,5h$, h – înălțimea tetraedrului;
 - volumul trunchiului de piramidă este 676 cm^3 și înălțimea lui este $0,(3)h$, h – înălțimea tetraedrului;
 - volumul trunchiului de piramidă este 630 cm^3 și înălțimea lui este $0,25h$, h – înălțimea tetraedrului;
 - volumul trunchiului de piramidă este 372 cm^3 și înălțimea lui este $0,2h$, h – înălțimea tetraedrului.
- Un trunchi de piramidă s-a obținut dintr-o piramidă triunghiulară. Aflați volumul piramidei care s-a obținut în același timp cu trunchiul, dacă:
 - volumul trunchiului de piramidă este 210 cm^3 și înălțimea lui este $0,5h$, h – înălțimea tetraedrului;
 - volumul trunchiului de piramidă este 260 cm^3 și înălțimea lui este $0,(3)h$, h – înălțimea tetraedrului.
- $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați volumul trunchiului, dacă:

a) $l_B = 7\text{ cm}$, $l_b = 3\text{ cm}$ și $h_t = 8\text{ cm}$;	b) $l_B = 9\text{ cm}$, $l_b = 4\text{ cm}$ și $h_t = 6\text{ cm}$;
c) $l_B = 10\text{ cm}$, $l_b = 4\text{ cm}$ și $a_t = 9\text{ cm}$;	d) $l_B = 12\text{ cm}$, $l_b = 5\text{ cm}$ și $a_t = 4\text{ cm}$.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați volumul trunchiului, dacă:

a) $l_B = 11\text{ cm}$, $l_b = 2\text{ cm}$ și $h_t = 12\text{ cm}$;	b) $l_B = 6\text{ cm}$, $l_b = 2\text{ cm}$ și $h_t = 9\text{ cm}$;
c) $l_B = 10\text{ cm}$, $l_b = 3\text{ cm}$ și $a_t = 4\text{ cm}$;	d) $l_B = 12\text{ cm}$, $l_b = 4\text{ cm}$ și $a_t = 6\text{ cm}$.
- $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice isoscele. Aflați volumul trunchiului cu înălțimea h_t , dacă:

a) $AB = AC = 15\text{ cm}$, $A_1B_1 = 7\text{ cm}$ și $h_t = 8\text{ cm}$;	b) $AB = AC = 21\text{ cm}$, $A_1B_1 = 5\text{ cm}$ și $h_t = 6\text{ cm}$;
c) $AB = AC = 16\text{ cm}$, $A_1B_1 = 6\text{ cm}$ și $h_t = 9\text{ cm}$;	d) $AB = AC = 24\text{ cm}$, $A_1B_1 = 8\text{ cm}$ și $h_t = 15\text{ cm}$.
- $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele dreptunghiuri. Aflați volumul trunchiului cu înălțimea h_t , dacă:
 - $AB = 12\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$, $A_1B_1 = 3\text{ cm}$ și $h_t = 12\text{ cm}$;
 - $AB = 10\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, $A_1B_1 = 5\text{ cm}$ și $h_t = 13\text{ cm}$;
 - $AB = 15\text{ cm}$, $BC = 9\text{ cm}$, $A_1B_1 = 3\text{ cm}$ și $h_t = 7\text{ cm}$;
 - $AB = 18\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$, $A_1B_1 = 6\text{ cm}$ și $h_t = 9\text{ cm}$.
- $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice (unghiul A este drept). Aflați volumul trunchiului, dacă:
 - $AB = 15\text{ cm}$, $AC = 21\text{ cm}$, $A_1B_1 = 5\text{ cm}$ și înălțimea piramidei din care provine trunchiul este de 24 cm ;
 - $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$, $A_1B_1 = 6\text{ cm}$ și înălțimea piramidei din care provine trunchiul este de 28 cm .

Sinteză (Facultativ)

1. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Completați tabelul și aflați l_B :

l_b (cm)	$(l_B - l_b)$ (cm)	h_t (cm)	a_t (cm)	$(a_B - a_b)$ (cm)	m_t (cm)	$(R_B - R_b)$ (cm)
12			12		20	
6		20	29			

2. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Completați tabelul și aflați l_B :

l_b (cm)	$(l_B - l_b)$ (cm)	h_t (cm)	a_t (cm)	$(a_B - a_b)$ (cm)	m_t (cm)	$(R_B - R_b)$ (cm)
$8\sqrt{2}$		16			20	
20			48		50	

3. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați:
- a_t și m_t , dacă $l_B = 18$ cm, $l_b = 12$ cm și trapezul ABB_1A_1 are unghiul A de 60° ;
 - a_t și m_t , dacă $l_B = 18$ cm, $l_b = 12$ cm și trapezul ABB_1A_1 are unghiul A de 45° .
4. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați:
- a_t și m_t , dacă $l_B = 16$ cm, $l_b = 12$ cm și trapezul ABB_1A_1 are unghiul A de 30° ;
 - a_t și m_t , dacă $l_B = 20$ cm, $l_b = 14$ cm și trapezul ABB_1A_1 are unghiul A de 45° .
5. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă care se obține din piramida regulată $VABCD$ cu $[VA] \equiv [AB]$. Desfășurați trunchiul de piramidă cu: a) $AB = 6$ cm și $AA_1 = 3$ cm; b) $AB = 7$ cm și $AA_1 = 2$ cm.
6. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{A}_p$, dacă:
- $l_B = 15$ cm, $l_b = 5$ cm și $a_t = 8$ cm;
 - $l_B = 18$ cm, $l_b = 3$ cm și $a_t = 9$ cm.
7. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă regulată. Aflați $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{A}_p$, dacă:
- $l_B = 25$ cm, $l_b = 5$ cm și $a_t = 12$ cm;
 - $l_B = 26$ cm, $l_b = 11$ cm și $a_t = 18$ cm.
8. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați aria totală a piramidei obținute, dacă:
- aria totală a piramidei este 456 cm² și noua piramidă are înălțimea $0,5h$;
 - aria totală a piramidei este 540 cm² și noua piramidă are înălțimea $0,(3)h$.
9. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați volumul trunchiului de piramidă care se obține, dacă:
- volumul piramidei este 624 cm³ și noua piramidă are înălțimea $0,5h$;
 - volumul piramidei este 729 cm³ și noua piramidă are înălțimea $0,(3)h$.
10. Aflați volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată, dacă:
- $l_B = 24$ cm, $l_b = 15$ cm, $h_t = 12$ cm;
 - $l_B = 12$ cm, $l_b = 8$ cm, $h_t = 15$ cm.
11. Aflați volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, dacă:
- $l_B = 28$ cm, $l_b = 17$ cm, $h_t = 8$ cm;
 - $l_B = 16$ cm, $l_b = 12$ cm, $h_t = 9$ cm.
12. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele dreptunghiuri. Aflați volumul trunchiului cu înălțimea h_t , dacă: a) $AB = 24$ cm, $BC = 10$ cm, $A_1B_1 = 6$ cm și $h_t = 8$ cm;
- b) $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm, $A_1B_1 = 4$ cm și $h_t = 15$ cm.
13. $ABCA_1B_1C_1$ este un trunchi de piramidă cu înălțimea AA_1 și bazele triunghiuri dreptunghice (unghiul A este drept). Aflați $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}_p$, dacă $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm, $A_1B_1 = 6$ cm și înălțimea piramidei din care provine trunchiul este de 10 cm.

Evaluare

I

1. Aflați volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă $l_B = 18$ cm, $l_b = 16$ cm, $h_t = 15$ cm. 10
2. Aflați aria totală a trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă $l_B = 25$ cm, $l_b = 12$ cm, $a_t = 10$ cm. 20
3. Aflați volumul trunchiului de piramidă triunghiulară regulată, dacă $l_B = 16$ cm, $l_b = 12$ cm, $h_t = 18$ cm. 10
4. Aflați aria totală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată, dacă $l_B = 16$ cm, $l_b = 8$ cm, $a_t = 12$ cm. 10
5. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați aria totală a piramidei obținute, dacă aria totală a piramidei este 288 cm² și noua piramidă are înălțimea $0,5h$. 10
6. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați volumul trunchiului de piramidă care se obține, dacă volumul piramidei este $1\,280$ cm³ și noua piramidă are înălțimea $0,25h$. 10
7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are $l_B = 29$ cm, $l_b = 21$ cm, $m_t = 25$ cm. Aflați a_t și h_t . 15
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele dreptunghiuri. Aflați volumul trunchiului cu înălțimea h_t , dacă $AB = 32$ cm, $BC = 12$ cm, $A_1 B_1 = 8$ cm și $h_t = 9$ cm. 15

II

1. Aflați volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă $l_B = 20$ cm, $l_b = 15$ cm, $h_t = 12$ cm.
2. Aflați aria totală a trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă $l_B = 24$ cm, $l_b = 14$ cm, $a_t = 8$ cm.
3. Aflați volumul trunchiului de piramidă triunghiulară regulată, dacă $l_B = 20$ cm, $l_b = 16$ cm, $h_t = 15$ cm.
4. Aflați aria totală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată, dacă $l_B = 18$ cm, $l_b = 8$ cm, $a_t = 15$ cm.
5. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați aria totală a piramidei obținute, dacă aria totală a piramidei este 324 cm² și noua piramidă are înălțimea $0,5h$.
6. O piramidă de înălțime h se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei. Aflați volumul trunchiului de piramidă care se obține, dacă volumul piramidei este $1\,024$ cm³ și noua piramidă are înălțimea $0,25h$.
7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are $l_B = 27$ cm, $l_b = 23$ cm, $m_t = 24$ cm. Aflați a_t și h_t .
8. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ este un trunchi de piramidă cu bazele dreptunghiuri. Aflați volumul trunchiului cu înălțimea h_t , dacă $AB = 28$ cm, $BC = 16$ cm, $A_1 B_1 = 7$ cm și $h_t = 10$ cm.

Problemă rezolvată

Piramida regulată $VABCD$ are $AC = 24\sqrt{2}$ cm și unghiul CVA este drept.

a) Aflați volumul piramidei.

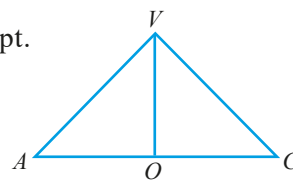
b) Aflați aria laterală și aria totală a piramidei.

Rezolvare. Triunghiul CVA este dreptunghic isoscel. VO este înălțimea triunghiului CVA este și înălțimea piramidei $VABCD$, (1).

a) $VO = AC : 2 = 12\sqrt{2}$ cm și $VA = CV = 24$ cm, (2). Pătratul $ABCD$ are $AC = 24\sqrt{2}$ cm, (3). (3) implică: $AB = 24$ cm, (4). (1) și (4) implică: $\mathcal{V} = 0,33 \cdot 24^2 \cdot 12\sqrt{2}$ cm³ = $2\,304\sqrt{2}$ cm³.

b) (1) și (4) implică: fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale, (5). (5) implică: $\mathcal{A}_l = (4 \cdot 24^2 \sqrt{3} : 4)$ cm² = $576\sqrt{3}$ cm². $\mathcal{A}_t = 576\sqrt{3}$ cm² + $576\sqrt{3}$ cm² = $576(1 + \sqrt{3})$ cm².

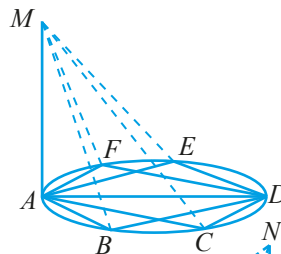
Răspuns: a) $\mathcal{V} = 2\,304\sqrt{2}$ cm³. b) $\mathcal{A}_l = 576\sqrt{3}$ cm². $\mathcal{A}_t = 576(1 + \sqrt{3})$ cm².



Suplimentar

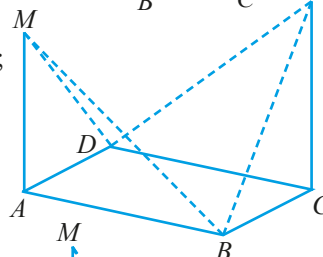
1. În desen: $M \notin (ABC)$; $MA \perp (ABC)$; $[AD]$ este diametru al cercului conținut de (ABC) ; B, C, E, F sunt puncte ale cercului de diametru AD . Arătați că:

- $MB \perp BD$;
- $MC \perp CD$;
- $ME \perp DE$;
- $MF \perp FD$.



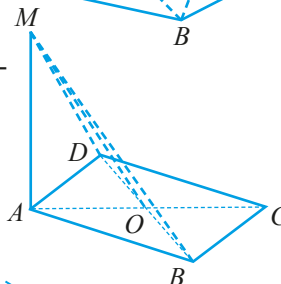
2. În desen: $ABCD$ este dreptunghi; $M \notin (ABC)$; $MA \perp (ABC)$; $N \notin (ABC)$; $NC \perp (ABC)$. Arătați că:

- $MB \perp BC$;
- $MD \perp CD$;
- $NB \perp AB$;
- $ND \perp AD$.



3. În desen: $ABCD$ este pătrat; $M \notin (ABC)$; $MA \perp (ABC)$; O este centrul pătratului. Arătați că:

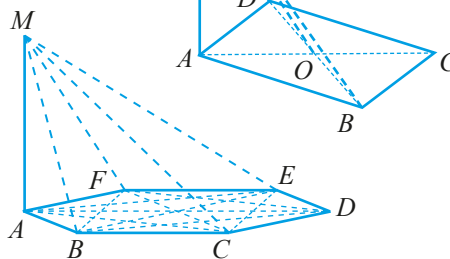
- $MB \perp BC$;
- $MD \perp DC$;
- $MO \perp BD$.



4. $ABCDEF$ este hexagon regulat. $M \notin (ABC)$; $MA \perp (ABC)$.

Arătați că:

- $MB \perp BD$;
- $MC \perp CD$;
- $ME \perp DE$;
- $MF \perp FD$.

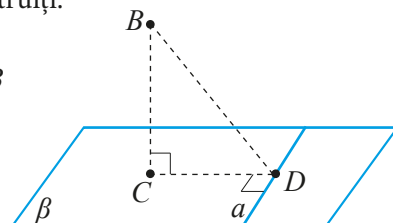


5. $ABCDEF$ este hexagon regulat. $M \notin (ABC)$; $MA \perp (ABC)$. Construiți:

- $\text{pr}_{BF} M$;
- $\text{pr}_{CE} M$.

6. În desen: $B \notin \beta$, $a \subset \beta$, $C = \text{pr}_\beta B$, $D = \text{pr}_a C$. Justificați că $D = \text{pr}_a B$ și aflați BD , dacă:

- $BC = 20$ cm și $CD = 15$ cm;
- $BC = 12$ cm și $CD = 5$ cm;
- $BC = 20$ cm și $CD = 21$ cm.

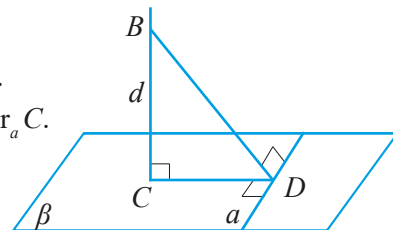


7. În desen: $B \notin \beta$, $a \subset \beta$, $C = \text{pr}_\beta B$, $D = \text{pr}_a B$. Justificați că $D = \text{pr}_a C$ și aflați CD , dacă:

- $BC = 10$ cm și $BD = 15$ cm;
- $BC = 8$ cm și $BD = 12$ cm;
- $BC = 15$ cm și $BD = 18$ cm;
- $BC = 16$ cm și $BD = 25$ cm.

8. În desen: $B \notin \beta$, $B \in d$, $a \subset \beta$, $C \in \beta$, $BC \perp CD$, $D = \text{pr}_a B$, $D = \text{pr}_a C$. Aflați BC , dacă:

- $BD = 15$ cm și $CD = 8$ cm;
- $BD = 18$ cm și $CD = 15$ cm;
- $BD = 20$ cm și $CD = 16$ cm;
- $BD = 21$ cm și $CD = 14$ cm.



9. Fie cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Construiți diagonalele fețelor cubului și aflați:

- $d(A_1, O)$, O – centrul pătratului $ABCD$, dacă $AB = 5$ cm;
- $d(B, O_1)$, O_1 – centrul pătratului $A_1 B_1 C_1 D_1$, dacă $AB = 12$ cm;
- $d(C_1, O_2)$, O_2 – centrul pătratului $ABB_1 A_1$, dacă $AB = 20$ cm.

10. $ABCDEF$ este hexagon regulat. $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$. Aflați:

- $d(M, BE)$, dacă $AM = 12$ cm și $AB = 8$ cm;
- $d(M, CD)$, dacă $AM = 20$ cm și $AB = 5$ cm;

c) $d(M, FD)$, dacă $AM = 24$ cm și $AB = 6$ cm; d) $d(M, ED)$, dacă $AM = 16$ cm și $AB = 4$ cm.

11. Fie $ABCDEF$ este hexagon regulat. $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$. Aflați:

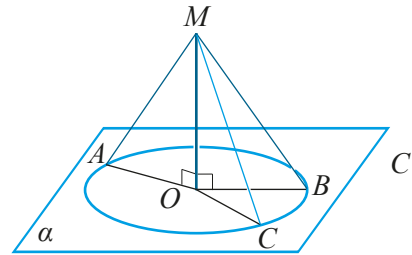
- $d(M, BF)$, dacă $AM = 14$ cm și $AB = 2$ cm;
- $d(M, CE)$, dacă $AM = 15$ cm și $AB = 3$ cm;
- $d(M, EF)$, dacă $AM = 16$ cm și $AB = 5$ cm.

12. $ABCD$ este romb, $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$. Aflați:

- $d(M, BD)$, $AM = 21$ cm, $AC = 6$ cm, $BD = 8$ cm;
- $d(M, DC)$, $AM = 24$ cm, $AC = 24$ cm, $AB = 18$ cm.

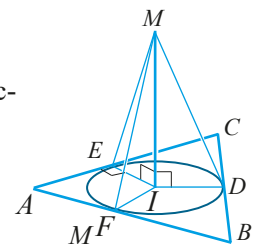
13. În desen: cercul de centru O și rază R , conținut de planul α ; A, B , sunt puncte ale $\mathcal{C}(O, R)$; $M \notin \alpha$, $O = \text{pr}_\alpha M$. Aflați:

- AM, MB, MC , dacă $OM = 40$ cm și $R = 9$ cm;
- AM, MB, MC , dacă $OM = 20$ cm și $R = 21$ cm;
- AM, MB, MC , dacă $OM = 40$ cm și $R = 24$ cm.



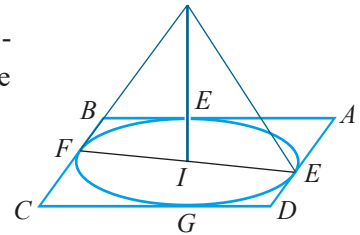
14. În desen: cercul de centru I și rază r , înscris în triunghiul ABC , E, F sunt punctele de tangență ale $\mathcal{C}(I, r)$ cu laturile triunghiului ABC . Aflați:

- DM, ME, MF , dacă $IM = 25$ cm și $r = 20$ cm;
- DM, ME, MF , dacă $IM = 36$ cm și $r = 15$ cm;
- DM, ME, MF , dacă $IM = 32$ cm și $r = 10$ cm.



15. $ABCD$ este romb, $M \notin (ABC)$, $MI \perp (ABC)$, I – intersecția diagonalelor; E, F, G, H sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile rombului. Aflați:

- IM , dacă $ME = 29$ cm și $r = 20$ cm;
- IM , dacă $MF = 24$ cm și $r = 8$ cm;
- ME , dacă $MI = 15$ cm și $r = 7$ cm.



16. $ABCD$ este pătrat, $M \notin (ABC)$, $MI \perp (ABC)$, I – intersecția diagonalelor; E, F, G, H sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile pătratului. Aflați:

- IM , dacă $ME = 26$ cm și $AB = 16$ cm;
- MF , dacă $IM = 18$ cm și $AB = 12$ cm;
- AB , dacă $IM = 40$ cm și $MG = 41$ cm.

17. Fie piramida $VABC$ cu muchiile laterale congruente, $[VA] \equiv [VB] \equiv [CV]$, R – raza cercului circumscris triunghiului ABC . Aflați:

- $d(V, (ABC))$ dacă $VA = 15$ cm, $R = 6$ cm;
- VB , $d(V, (ABC)) = 12$ cm, $R = 5$ cm;
- R , $d(V, (ABC)) = 18$ cm, $CV = 24$ cm.

18. Fie piramida $VABC$ cu muchiile laterale congruente, $[VA] \equiv [VB] \equiv [CV]$, R – raza cercului circumscris triunghiului echilateral ABC , r – raza cercului înscris în triunghiul ABC . Aflați:

- $d(V, (ABC))$ dacă $VA = 24$ cm, $r = 4$ cm;
- $d(V, (ABC))$ dacă $CV = 9$ cm, $AB = 5$ cm;
- VB dacă $d(V, (ABC)) = 32$ cm, $R = 10$ cm.

19. Fie piramida $VABC$ cu muchiile laterale congruente, $[VA] \equiv [VB] \equiv [CV]$, R – raza cercului circumscris triunghiului ABC . Aflați:

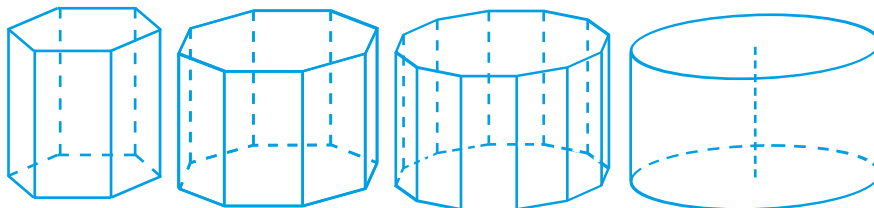
- $d(V, (ABC))$ dacă $VA = 40$ cm, $R = 10$ cm;
- VB dacă $d(V, (ABC)) = 14$ cm și $AB = 5$ cm.

Corpuri de rotație

1. Cilindrul circular drept. Elementele unui cilindru circular drept

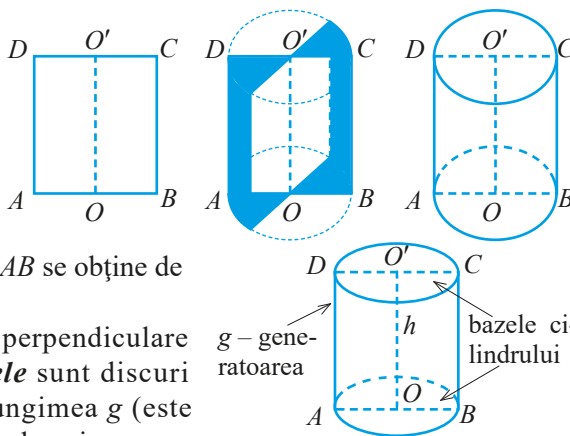
Multe dintre obiectele din jur au forma unui cilindru circular drept.

Desenele următoare ilustrează legătura dintre prisma dreaptă și cilindru circular drept.



O prismă regulată cu bazele poligoane cu 12 laturi aproximează mai bine un cilindru circular drept decât una cu bazele poligoane cu 8 sau 6 laturi. O prismă regulată cu bazele poligoane cu 100 de laturi aproximează cilindru circular drept mult mai bine. Legătura dintre prisma dreaptă și cilindru circular drept permite să identificăm: bazele cilindrului – discuri circulare conținute de plane paralele; înălțimea cilindrului – distanța dintre planele bazelor; dreapta care conține centrele bazelor este perpendiculară pe planele lor.

Generarea cilindrului circular. Prin rotația dreptunghiului $ABCD$ în jurul axei OO' se obține un cilindru circular drept cu secțiunea axială dreptunghiul $ABCD$ și diametrul bazelor AB , respectiv CD . În aceste condiții, $[AD]$ și $[BC]$ sunt generatoare ale cilindrului.



Prin rotația dreptunghiului în jurul dreptei AD sau AB se obține de fiecare dată un cilindru circular drept.

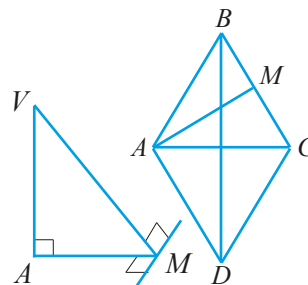
Cilindrul circular drept: are planele bazelor perpendiculare pe dreapta determinată de centrele bazelor; **bazele** sunt discuri circulare de **rază** $r = AO$; **generatoarea** AD are lungimea g (este numită tot generatoare); distanța dintre baze este lungimea segmentului $OO' = h$; cilindru circular drept are $g = h$.

Suplimentar. Problemă rezolvată

Piramida $VABCD$ are baza rombul $ABCD$ cu $AC = 30$ cm, $BD = 40$ cm și $d(V, BC) = 26$ cm. Aflați volumul piramidei, dacă VA este înălțimea piramidei.

Rezolvare. Fie $VM \perp BD$. Teorema celor 3 perpendiculare (Rec.I) implică $AM \perp BD$. Se calculează AB și AM , înălțimea rombului din formula ariei rombului. 15, 20, 25 – triplet pitagoreic. Rezultă $AB = 25$ cm. $25 \cdot AM = 30 \cdot 40 : 2$ implică $AM = 24$ cm. Triunghiul dreptunghic AVM are laturile de 10 m, 24 m, 26 m. $V = 0,33 \cdot VA \cdot S_b = 0,33 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 40 : 2 \text{ cm}^3 = 2000 \text{ cm}^3$.

Răspuns: 2000 cm^3 .



■ Exerciții

1. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) Cilindrul circular drept are planele bazelor ...
 - b) Bazele cilindrului circular drept ...
 - c) Cilindrul circular drept are $g = \dots$
2. Copiați și completați propozițiile adevărate: a) $g - \dots$ b) $r - \dots$ c) $h - \dots$
3. Precizați ce se obține rotind:
 - a) un dreptunghi în jurul uneia dintre axele sale de simetrie;
 - b) un pătrat în jurul uneia dintre axele sale de simetrie;
 - c) un dreptunghi în jurul uneia dintre laturile sale.
4. Precizați ce se obține rotind:
 - a) în jurul axei sale o prismă triunghiulară regulată;
 - b) în jurul axei sale un cub;
 - c) în jurul axei sale un paralelipiped dreptunghic;
 - d) în jurul axei sale o prismă hexagonală regulată.
5. Precizați ce se obține rotind:
 - a) în jurul uneia dintre muchiile sale laterale o prismă triunghiulară regulată;
 - b) în jurul uneia dintre muchiile sale laterale un cub;
 - c) în jurul uneia dintre muchiile sale laterale un paralelipiped dreptunghic.
6. Precizați ce se obține rotind:
 - a) în jurul uneia dintre muchiile bazei sale un cub;
 - b) în jurul uneia dintre muchiile bazei sale un paralelipiped dreptunghic.
7. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) pătratului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre axele sale;
 - b) pătratului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre laturile sale;
 - c) dreptunghiului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre axele sale;
 - d) dreptunghiului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre laturile sale.
8. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) cubului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre axele sale;
 - b) cubului și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre muchiile sale laterale;
 - c) paralelipipedului dreptunghic și cele ale cilindrului care se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre axele sale;
 - d) paralelipipedului dreptunghic și cele ale cilindrului care se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre muchiile sale laterale.
9. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) prismei triunghiulare regulate și cele ale cilindrului care se obține prin rotația ei în jurul axei sale;
 - b) prismei triunghiulare regulate și cele ale cilindrului care se obține prin rotația ei în jurul uneia dintre muchiile sale laterale;
 - c) prismei hexagonale regulate și cele ale cilindrului care se obține prin rotația ei în jurul axei sale;
 - d) prismei hexagonale regulate și cele ale cilindrului ce se obține prin rotația ei în jurul uneia dintre muchiile sale laterale.

2. Aria laterală, aria totală, volumul cilindrului circular drept

Aria laterală și aria totală a cilindrului circular drept. Desfășurându-se suprafața laterală a unui cilindru circular drept cu generatoarea g și raza cercului unei baze r , se obține un dreptunghi cu dimensiunile g și $2\pi r$. Prin urmare, $\mathcal{A}_l = 2\pi rg$.

Ariile bazelor cilindrului circular drept sunt

$$\mathcal{A}_b = \pi r^2.$$

Aria totală a cilindrului circular drept este:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 2\pi r(g + r).$$

Teoremă. Un cilindru circular drept cu generatoarea g și raza cercurilor bazelor r are:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi rg \text{ și } \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 2\pi r(g + r).$$

Volumul cilindrului circular drept. Fie cilindrul circular drept cu înălțimea h și razele bazelor r . Legătura dintre prisma dreaptă și cilindrul circular drept permite să se aplice formula volumului prismei drepte pentru a stabili formula de calcul a volumului cilindrului circular drept.

Aria unei baze a cilindrului circular drept este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$.

Prin urmare, volumul cilindrului circular drept este $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h = \pi r^2 h$.

Teoremă. Volumul unui cilindru circular drept având înălțimea h și raza cercurilor bazelor r este $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h = \pi r^2 h$.

Probleme rezolvate. 1) Aflați volumul unui cilindru circular drept cu $\mathcal{A}_l = 176\pi \text{ cm}^2$ și $\mathcal{A}_t = 418\pi \text{ cm}^2$.

Rezolvare. $\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_l = 242\pi \text{ cm}^2$, (1). (1) implică: $R = 11 \text{ cm}$ și $g = h = 8 \text{ cm}$, (2). (2) $\Rightarrow \mathcal{V} = 968\pi \text{ cm}^3$.

2) Aflați aria totală a cilindrului circular drept cu $\mathcal{A}_l = 930\pi \text{ cm}^2$ și $\mathcal{V} = 6\,975\pi \text{ cm}^3$.

Rezolvare. $\mathcal{V}$: $\mathcal{A}_l = 7,5 \text{ cm}$, (1). (1) implică: $R = 15 \text{ cm}$ și $g = h = 31 \text{ cm}$, (2). (2) $\Rightarrow \mathcal{A}_t = 1\,380\pi \text{ cm}^2$.

Secțiuni în cilindrul circular drept

a) Fie cilindrul circular drept cu înălțimea h și raza cercurilor bazelor r . Intersectând cilindrul circular drept cu un plan paralel cu planul unei baze se obține un cerc de rază r . Aria secțiunii este aria discului circular de rază r .

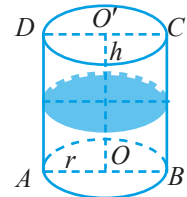
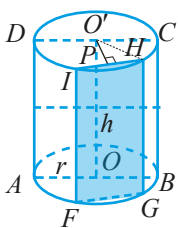
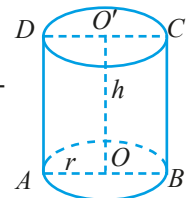
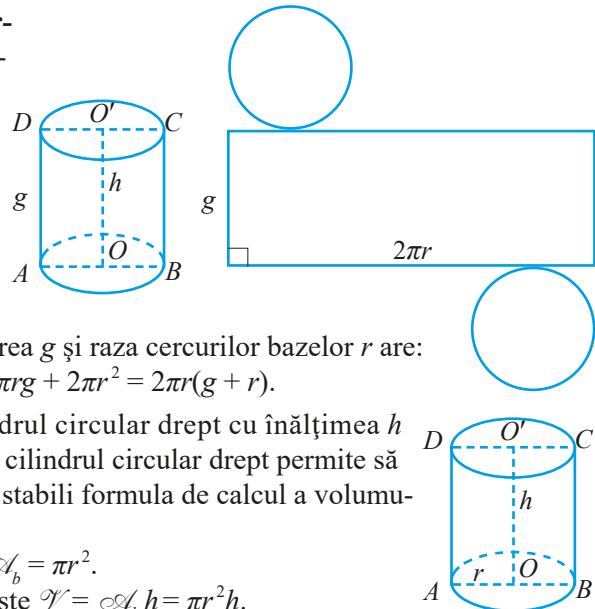
b) Intersectând cilindrul circular drept cu un plan care conține axa OO' a cilindrului se obține o **secțiune axială** a cilindrului circular drept. Oricare din aceste secțiuni este un dreptunghi cu dimensiunile $2r$ și h . Dacă $h = 2r$, atunci se obține un pătrat.

c) (Suplimentar) Intersectând cilindrul circular drept cu un plan FGH , paralel cu axa OO' a cilindrului, se obține un **dreptunghi** cu una dintre dimensiuni h . Cealaltă dimensiune se poate afla dacă se cunoaște distanța $O'P$ de la O' la planul FGH . Se ține cont că raza perpendiculară pe o coardă conține mijlocul coardei și al arcului corespunzător și se obține: $r^2 = O'P^2 + 0,25HI^2$.

Problemă rezolvată

Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept care se obține rotind în jurul laturii AB , dreptunghiul $ABCD$, dacă perimetrul dreptunghiului este 34 cm și $AC = 13 \text{ cm}$.

Rezolvare. $AB = a \text{ cm}$ și $BC = b \text{ cm}$, (1). (1) implică: $a + b = 34 : 2$ și $a^2 + b^2 = 169$, (2). (2) implică: $a + b = 17$ și $a^2 + b^2 = 169$, (3). (3) implică: $a + b = 17$ și $2ab = 289 - 169$, (4). (4) implică: $a + b = 17$ și $ab = 60$, (5). Sistemul (5) are soluțiile ecuației: $z^2 - 17z + 60 = 0$, $S = \{5, 12\}$, (6). (6) implică: $a = 5$ și $b = 12$; $a = 12$ și $b = 5$. Dacă $R = 12 \text{ cm}$ și $g = h = 5 \text{ cm}$, atunci $\mathcal{A}_l = 120\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_t = 408\pi \text{ cm}^2$ și $\mathcal{V} = 300\pi \text{ cm}^3$. Dacă $r = 5 \text{ cm}$ și $g = h = 12 \text{ cm}$, atunci $\mathcal{A}_l = 120\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_t = 170\pi \text{ cm}^2$ și $\mathcal{V} = 720\pi \text{ cm}^3$.



■ Exerciții

- Desfășurați un cilindru circular drept cu:
 - $r = 2$ cm și $g = 2$ cm;
 - $r = 2$ cm și $g = 3$ cm;
 - $r = 2,5$ cm și $g = 1$ cm.
- Copiați și completați propozițiile adevărate: a) Aria laterală a cilindrului circular drept ...
b) Aria totală a cilindrului circular drept ... c) Volumul cilindrului circular drept ...
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept cu:
 - $r = 12$ cm și $g = 8$ cm;
 - $r = 15$ cm și $g = 10$ cm;
 - $r = 18$ cm și $g = 5$ cm;
 - $r = 24$ cm și $g = 15$ cm;
 - $r = 17$ cm și $g = 20$ cm;
 - $r = 19$ cm și $g = 30$ cm.
- Aflați aria secțiunii axiale a unui cilindru circular drept, dacă:
 - $r = 28$ cm și $g = 22$ cm;
 - $r = 24$ cm și $g = 26$ cm;
 - $r = 31$ cm și $g = 39$ cm;
 - $r = 42$ cm și $g = 48$ cm;
 - $r = 61$ cm și $g = 69$ cm;
 - $r = 53$ cm și $g = 57$ cm.
- Aflați aria intersecției unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu planul uneia dintre bazele sale, dacă: a) $r = 9$ cm și $g = 3$ cm; b) $r = 12$ cm și $g = 4$ cm; c) $r = 15$ cm și $g = 2$ cm.
- Facultativ) Aflați aria unei secțiuni cu un plan paralel cu axa, a unui cilindru circular drept, dacă:
 - $r = 16$ cm, $g = 6$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 2 cm;
 - $r = 18$ cm, $g = 8$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 3 cm;
 - $r = 15$ cm, $g = 9$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 4 cm;
 - $r = 12$ cm, $g = 18$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 6 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept care se obține rotind un pătrat:
 - cu laturile de 8 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 12 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 16 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 22 cm în jurul uneia dintre axele sale.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept care se obține rotind un pătrat:
 - cu laturile de 24 cm în jurul uneia dintre laturile sale;
 - cu laturile de 15 cm în jurul uneia dintre laturile sale;
 - cu laturile de 9 cm în jurul uneia dintre laturile sale.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept care se obține rotind în jurul mediatoarei segmentului AB , dreptunghiul $ABCD$:
 - cu $AB = 16$ cm și $BC = 11$ cm;
 - cu $AB = 24$ cm și $BC = 13$ cm;
 - cu $AB = 12$ cm și $BC = 15$ cm;
 - cu $AB = 18$ cm și $BC = 9$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept care se obține rotind în jurul laturii AB , dreptunghiul $ABCD$:
 - cu $AB = 15$ cm și $BC = 9$ cm;
 - cu $AB = 13$ cm și $BC = 16$ cm;
 - cu $AB = 9$ cm și $BC = 18$ cm;
 - cu $AB = 14$ cm și $BC = 5$ cm.
- Aflați aria totală și volumul unui cilindru circular drept cu:
 - $g = 13$ cm și $\mathcal{A}_l = 442\pi$ cm²;
 - $g = 21$ cm și $\mathcal{A}_l = 1\,218\pi$ cm²;
 - $g = 28$ cm și $\mathcal{A}_l = 364\pi$ cm².
- Aflați volumul unui cilindru circular drept cu:
 - $\mathcal{A}_l = 80\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 130\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 104\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 180\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 154\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 252\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 216\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 378\pi$ cm².
- Aflați aria totală a cilindrului circular drept cu:
 - $\mathcal{A}_l = 240\pi$ cm² și $\mathcal{V} = 1\,920\pi$ cm³;
 - $\mathcal{A}_l = 286\pi$ cm² și $\mathcal{V} = 1\,573\pi$ cm³;
 - $\mathcal{A}_l = 198\pi$ cm² și $\mathcal{V} = 891\pi$ cm³;
 - $\mathcal{A}_l = 360\pi$ cm² și $\mathcal{V} = 2\,160\pi$ cm³.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept cu o secțiune axială:
 - un pătrat cu o diagonală de 28 cm;
 - un pătrat cu o diagonală de 72 cm.

Sinteză

- Desfășurați un cilindru circular drept cu: a) $r = 1$ cm și $g = 4$ cm; b) $r = 1,5$ cm și $g = 3$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă:
 - $r = 16$ cm și $g = 12$ cm;
 - $r = 18$ cm și $g = 11$ cm;
 - $r = 23$ cm și $g = 15$ cm.
- Aflați aria secțiunii axiale a unui cilindru circular drept, dacă:
 - $r = 12$ cm și $h = 8$ cm;
 - $r = 9$ cm și $h = 13$ cm;
 - $r = 13$ cm și $h = 13$ cm.
- Aflați aria intersecției unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu planul uneia dintre bazele sale, dacă:
 - $r = 16$ cm și $g = 11$ cm;
 - $r = 18$ cm și $g = 23$ cm;
 - $r = 15$ cm și $g = 8$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă:
 - aria secțiunii axiale a cilindrului este 510 cm^2 și $r = 17$ cm;
 - aria secțiunii axiale a cilindrului este 756 cm^2 și $r = 18$ cm.
- Aflați aria unei secțiuni paralele cu axa, a unui cilindru circular drept, dacă:
 - $r = 17$ cm, $g = 9$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 3 cm;
 - $r = 19$ cm, $g = 12$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 5 cm.
- Aflați aria totală și volumul cilindrului circular drept cu:
 - $h = 17$ cm și $\mathcal{A}_l = 306\pi \text{ cm}^2$;
 - $h = 7$ cm și $\mathcal{A}_l = 518\pi \text{ cm}^2$;
 - $h = 12$ cm și $\mathcal{A}_l = 624\pi \text{ cm}^2$.
- Aflați volumul apei dintr-o conductă cilindrică având:
 - diametrul = 1 m și lungimea = 10 km;
 - diametrul = 5 dm și lungimea = 100 m;
 - diametrul = 5 cm și lungimea = 15 m;
 - diametrul = 8 dm și lungimea = 250 m.
- Aflați capacitatea unei cisterne, dacă:
 - diametrul ei este de 1,5 m și are lungimea de 8 m;
 - diametrul ei este de 3 m și are lungimea de 12 m.
- Aflați aria tablei din care sunt confecționate cisternele de la ex. 9.
- O piscină are forma de cilindru circular drept. Aflați capacitatea ei, dacă:
 - are diametrul de 16 m și adâncimea de 2,5 m;
 - are diametrul de 20 m și adâncimea de 3 m.
- Suprafața piscinei din ex. 11 se vopsește pentru impermeabilizare. O cutie de vopsea ajunge pentru a acoperi 5 m^2 din suprafața piscinei. Aflați numărul minim de cutii cu vopsea care trebuie procurate.
- Un acvariu cilindric are diametrul de 50 cm și înălțimea de 45 cm. Apa din el se toarnă într-un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu bazele de dimensiuni 50 cm și 25 cm. Aflați înălțimea minimă a vasului paralelipipedic.
- O cisternă cilindrică are diametrul de 3 m și lungimea de 8 m. Suprafața ei trebuie acoperită cu un strat de vopsea de 5 mm. Pentru aceasta trebuie procurate cutii de vopsea cu diametrul de 50 cm și înălțimea de 70 cm. Aflați cât costă procurarea numărului minim de cutii cu vopsea, dacă o cutie costă 185 lei.
- Dintr-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 45 cm, 45 cm, 90 cm se confecționează un cilindru circular drept eliminând cantitatea minimă de material. Aflați volumul minim de material care trebuie înlăturat.
- Dintr-o prismă triunghiulară regulată cu muchiile bazelor de 48 cm și înălțimea de 75 cm se confecționează un cilindru circular drept eliminând cantitatea minimă de material. Aflați volumul minim de material care trebuie înlăturat.
- Dintr-o prismă hexagonală regulată cu muchiile bazelor de 15 cm și înălțimea de 8,2 dm se confecționează un cilindru circular drept eliminând cantitatea minimă de material. Aflați volumul minim de material care trebuie înlăturat.

Evaluare

I

1. Desfășurați un cilindru circular drept cu $r = 2$ cm și $h = 3$ cm. 10
2. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, având $r = 9$ cm și $g = 16$ cm. 20
3. Aflați aria secțiunii axiale a unui cilindru circular drept, dacă $r = 15$ cm și $h = 9$ cm. 20
4. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, având $h = 7$ cm și aria unei secțiuni paralele cu planul unei baze 69π cm². 10
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă aria secțiunii axiale a cilindrului este 630 cm² și $r = 21$ cm. 15
6. Aflați aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă $h = 24$ cm și $\mathcal{A}_l = 528\pi$ cm². 15
7. Aflați aria unei secțiuni cu un plan paralel cu axa, a unui cilindru circular drept, dacă $r = 16$ cm, $g = 18$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 5 cm. 15

II

1. Desfășurați un cilindru circular drept cu $r = 3$ cm și $h = 2$ cm.
2. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, având $r = 8$ cm și $g = 17$ cm.
3. Aflați aria secțiunii axiale a unui cilindru circular drept, dacă $r = 16$ cm și $h = 8$ cm.
4. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, având $h = 6$ cm și aria unei secțiuni paralele cu planul unei baze 196π cm².
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă aria secțiunii axiale a cilindrului este 690 cm² și $r = 23$ cm.
6. Aflați aria totală și volumul cilindrului circular drept, dacă $h = 19$ cm și $\mathcal{A}_l = 988\pi$ cm².
7. Aflați aria unei secțiuni cu un plan paralel cu axa, a unui cilindru circular drept, dacă $r = 15$ cm, $g = 17$ cm, distanța de la centrul unei baze până la planul de secțiune este 4 cm.

Puncte	0–5	6–24	24–32	33–55	56–65	66–75	76–85	86–95	96–100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Din istoria matematicii

Leonhard Euler (1707–1783)

Multe din rezultatele remarcabile din matematică sunt atribuite lui Leonhard Euler. A fost unul dintre cei mai mari matematicieni din istoria matematicii.

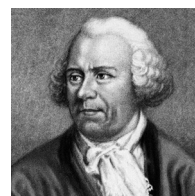
S-a născut la 15 aprilie 1707 în Elveția la Basel și a avut un contact nemijlocit cu o familie de matematicieni celebri, Bernoulli. Tatăl său a studiat matematica cu Jacob Bernoulli și a fost primul profesor de matematică al lui Leonhard. A studiat matematica cu Johann Bernoulli.

În 1725 fiul lui Johann Bernoulli, Nicolaus a fost invitat în Rusia, la St. Petersburg, unde în 1726 a venit și Leonhard Euler.

În perioadele 1726–1741 și 1766–1783 a lucrat la Academia din St. Petersburg, iar în perioada 1741–1766 s-a aflat la Academia din Berlin.

Toată activitatea lui a fost consacrată matematicii pure sau aplicate. Ea nu a fost întreruptă de pierderea unui ochi în 1725 și nici de pierderea celui de la doilea ochi în 1766. Dotat cu o memorie extraordinară (calcula până la 13 zecimale), după ce a orbit, și-a dictat lucrările.

În timpul vieții lui au fost publicate 530 de lucrări. După aceea numărul lor a ajuns la 886.

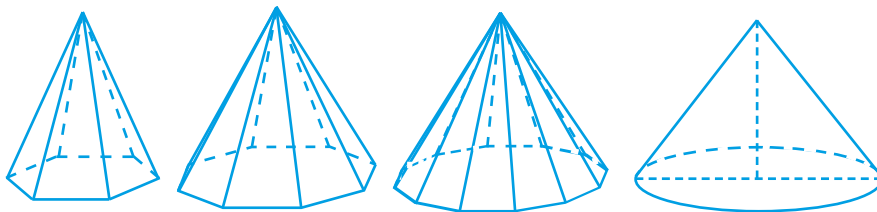


3. Conul circular drept. Elementele conului circular drept



Multe dintre obiectele pe care le folosim amintesc de conul circular drept.

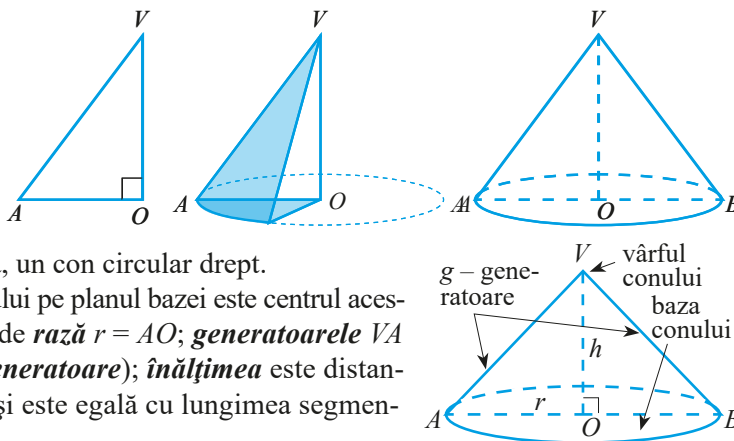
Desenele următoare ilustrează legătura dintre piramida regulată și conul circular drept.



O piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu 12 laturi aproximează mai bine un con circular drept decât una cu baza un octogon regulat sau un hexagon regulat. O piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu 100 de laturi aproximează conul circular drept mult mai bine decât cele enumerate mai sus. Legătura dintre piramida regulată și conul circular drept permite să identificăm: baza conului – un disc circular; vârful conului; înălțimea conului – distanța de la vârful conului la planul bazei lui; dreapta determinată de vârful conului și centrul bazei este perpendiculară pe planul bazei conului.

Generarea conului circular drept.

Rotind triunghiul dreptunghic OAV în jurul dreptei OV , se obține un con circular drept cu secțiunea axială triunghiul isoscel VAB și raza bazei OA . $[AV]$ și $[VB]$ sunt **generatoare** ale conului. Rotind triunghiul dreptunghic în jurul catetei OA , se obține, de asemenea, un con circular drept.



Conul circular drept: proiecția vârfului pe planul bazei este centrul acesteia; **baza** conului este un disc circular de **rază** $r = AO$; **generatoarele** VA și VB au lungimile g (este numită tot **generatoare**); **înălțimea** este distanța de la vârful conului la baza acestuia și este egală cu lungimea segmentului $VO = h$; $g^2 = r^2 + h^2$.

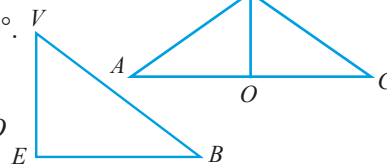
Problemă rezolvată

Piramida regulată $VABCD$ are $AC = 12\sqrt{6}$ cm și unghiul CVA de 120° .

a) Aflați volumul piramidei.

b) Aflați aria laterală și aria totală a piramidei.

Rezolvare. Triunghiul CVA este isoscel cu unghiurile A și C de 30° . VO este înălțimea triunghiului CVA este și înălțimea piramidei $VABCD$, (1).



a) $VO = OC : \sqrt{3} = (AC : 2) : \sqrt{3} = 6\sqrt{2}$ cm și $VA = CV = 12\sqrt{2}$ cm, (2). Pătratul $ABCD$ are $AC = 12\sqrt{6}$ cm, (3). (3) implică: $AB = 12\sqrt{3}$ cm, (4). (1) și (4) implică: $V = 0, (3) \cdot (12\sqrt{3})^2 \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm}^3 = 862\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

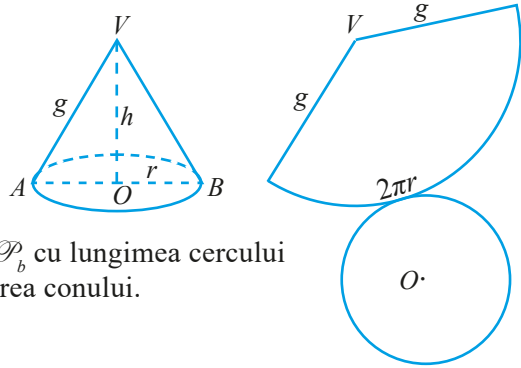
b) Fața VAB are VE – mediană, $CV = 12\sqrt{2}$ cm, $EB = 6\sqrt{3}$ cm, (5). (5) implică: $VE = 6\sqrt{5}$ cm, (6). (6) implică: $\mathcal{A}_f = (4 \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{5} : 2) \text{ cm}^2 = 144\sqrt{15} \text{ cm}^2$. $\mathcal{A}_t = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2 + 432 \text{ cm}^2 = 144\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

■ Exerciții

1. Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - a) Proiecția vârfului pe planul bazei ...
 - b) Baza conului circular drept ...
 - c) Înălțimea conului circular drept ...
 - d) $g^2 = \dots$
2. Copiați și completați semnificațiile notațiilor: a) $g - \dots$ b) $r - \dots$ c) $h - \dots$
3. Precizați ce se obține rotind:
 - a) un triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catetele sale;
 - b) un triunghi isoscel în jurul axei sale de simetrie;
 - c) un triunghi echilateral în jurul axei sale de simetrie.
4. Precizați ce se obține rotind:
 - a) în jurul înălțimii o piramidă triunghiulară regulată;
 - b) un tetraedru regulat în jurul unei înălțimi;
 - c) în jurul înălțimii o piramidă patrulateră regulată;
 - d) în jurul înălțimii o piramidă hexagonală regulată.
5. Precizați ce se obține rotind:
 - a) în jurul înălțimii VA piramida $VABC$ cu ABC triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC ;
 - b) în jurul înălțimii VA piramida $VABC$ cu ABC triunghi isoscel cu baza BC ;
 - c) în jurul înălțimii VA piramida $VABC$ cu ABC triunghi echilateral.
6. Precizați ce se obține rotind:
 - a) piramida $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat, în jurul înălțimii VA ;
 - b) piramida $VABCD$ cu $ABCD$ dreptunghi, în jurul înălțimii VA .
7. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) triunghiului dreptunghic și cele ale conului care se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre catetele sale;
 - b) triunghiului isoscel și cele ale conului care se obține prin rotația lui în jurul axei sale;
 - c) triunghiului echilateral și cele ale conului care se obține prin rotația lui în jurul uneia dintre axele sale.
8. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) piramidei triunghiulare regulate și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii sale;
 - b) tetraedrului regulat și cele ale conului care se obține prin rotația lui în jurul unei înălțimi;
 - c) piramidei patrulateră regulate și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii sale;
 - d) piramidei hexagonale regulate și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii sale.
9. Precizați relațiile dintre elementele:
 - a) piramidei $VABC$ cu ABC triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii VA ;
 - b) piramidei $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii VA ;
 - c) piramidei $VABCD$ cu $ABCD$ dreptunghi și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii VA ;
 - d) piramidei $VABC$ cu ABC triunghi echilateral și cele ale conului care se obține prin rotația ei în jurul înălțimii VA .
10. Precizați care sunt elementele conului care se obține prin rotația unui triunghi dreptunghic în jurul catetei mai lungi, dacă triunghiul are catetele:
 - a) de 5 cm și de 12 cm;
 - b) de 8 cm și de 15 cm;
 - c) de 7 cm și de 24 cm.
11. Precizați ce corp geometric se obține rotind un triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei sale.

4. Aria laterală, aria totală, volumul conului circular drept

Aria laterală și aria totală a conului circular drept. Desfășurând suprafața laterală a unui con circular drept cu generatoarea g și raza bazei r , se obține un sector de cerc de rază g . Legătura pe care am stabilit-o între piramida regulată și conul circular drept permite aplicarea formulei de calcul a ariei laterale pentru piramide regulate la calcularea ariei laterale a unui con circular drept. Prin urmare, $\mathcal{A}_l = 0,5 \mathcal{P}_b \cdot a_p$. Se înlocuiește $\mathcal{P}_b$ cu lungimea cercului bazei conului, $2\pi r$, iar apotema piramidei cu g , generatoarea conului.



Rezultă $\mathcal{A}_l = \pi r g$.

Aria bazei conului circular drept este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$.

Aria totală a conului circular drept este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

Teoremă. Un con circular drept cu generatoarea g și raza cercului bazei r are:

$$\mathcal{A}_l = \pi r g \text{ și } \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r).$$

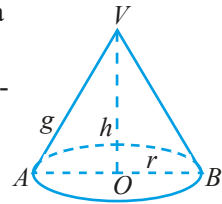
Volumul conului circular drept. Fie conul circular drept cu înălțimea h și raza bazei r . Legătura pe care am stabilit-o între piramida regulată și conul circular drept permite aplicarea formulei de calcul a volumului unei piramide regulate pentru a stabili formula de calcul a volumului conului circular drept.

Aria bazei conului circular drept este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$.

Prin urmare, volumul conului circular drept este: $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

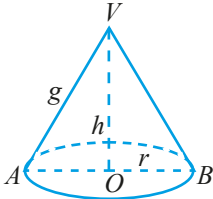
Teoremă. Volumul unui con circular drept având înălțimea h și raza bazei r este:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

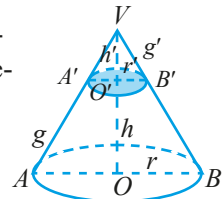


Secțiuni în conul circular drept

a) Fie un con circular drept cu înălțimea h și raza bazei r . Intersectând un con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei lui, se obține un con circular drept asemenea celui inițial. Elementele lor corespunzătoare sunt proporționale: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{g'}{g}$.



b) Intersectând conul circular drept cu un plan care conține axa OV a conului, se obține o secțiune axială a conului circular drept. Se obțin triunghiuri isoscele congruente cu triunghiul VAB cu baza $2r$ și laturile congruente de lungimi g . Înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului este h .



Problemă rezolvată

Un con circular drept are $\mathcal{A}_l = 136\pi \text{ cm}^2$. Aflați aria totală și volumul conului circular drept, dacă perimetrul triunghiului de secțiune axială este 50 cm.

Rezolvare. Secțiunea axială VAC are perimetrul de 50 cm, $2r + 2g = 50$, (1). $\mathcal{A}_l = 136\pi \text{ cm}^2$, implică: $rg = 136$, (2). (1) și (2) implică: $r + g = 25$ și $rg = 136$, (3). Sistemul (3) are soluțiile ecuației: $z^2 - 25z + 136 = 0$, $S = \{8, 17\}$, (4). (4) implică: $r = 8 \text{ cm}$ și $g = 17 \text{ cm}$ este singura soluție, deoarece generatoarea conului este mai lungă decât raza bazei conului. Rezultă $\mathcal{A}_t = \pi r(r + g) \text{ cm}^2 = 200\pi \text{ cm}^2$. Deoarece 8, 15, 17 este un triplet pitagoreic, rezultă că $h = 15 \text{ cm}$. $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 192\pi \text{ cm}^3$.

Răspuns: $\mathcal{A}_t = 200\pi \text{ cm}^2$; $\mathcal{V} = 192\pi \text{ cm}^3$.

■ Exerciții

- Desfășurați un con circular drept cu:
 - $r = 2$ cm și $g = 2$ cm;
 - $r = 2$ cm și $g = 3$ cm;
 - $r = 2,5$ cm și $g = 1$ cm.
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Aria laterală a conului circular drept ...
 - Aria totală a conului circular drept ...
 - Volumul conului circular drept ...
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu:
 - $r = 8$ cm și $g = 17$ cm;
 - $r = 7$ cm și $g = 25$ cm;
 - $r = 9$ cm și $g = 41$ cm;
 - $r = 9$ cm și $g = 25$ cm.
- Aflați aria secțiunii axiale a unui con circular drept, dacă:
 - $h = 5$ cm și $g = 13$ cm;
 - $h = 12$ cm și $g = 37$ cm;
 - $h = 15$ cm și $g = 17$ cm;
 - $h = 13$ cm și $g = 85$ cm;
 - $h = 16$ cm și $g = 65$ cm;
 - $h = 36$ cm și $g = 85$ cm.
- Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul bazei unui con circular drept, dacă:
 - $r = 15$ cm, $g = 17$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 3 cm;
 - $r = 21$ cm, $g = 29$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 12 cm;
 - $r = 12$ cm, $g = 13$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 2 cm;
 - $r = 9$ cm, $g = 41$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 10 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept care se obține rotind un triunghi dreptunghic:
 - cu catetele de 8 cm și 6 cm în jurul catetei mai lungi;
 - cu catetele de 5 cm și 12 cm în jurul catetei mai lungi;
 - cu catetele de 8 cm și 15 cm în jurul catetei mai lungi;
 - cu catetele de 28 cm și 45 cm în jurul catetei mai lungi.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept care se obține rotind un triunghi echilateral:
 - cu laturile de 24 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 15 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 21 cm în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 36 cm în jurul uneia dintre axele sale.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept care se obține rotind un triunghi isoscel:
 - cu baza de 12 cm și un unghi alăturat ei de 30° , în jurul axei sale;
 - cu baza de 18 cm și un unghi alăturat ei de 60° , în jurul axei sale;
 - cu baza de 24 cm și un unghi alăturat ei de 45° , în jurul axei sale;
 - cu baza de 36 cm și un unghi alăturat ei de 120° , în jurul axei sale.
- Aflați aria totală și volumul conului circular drept, dacă:
 - $g = 28$ cm și $\mathcal{A}_l = 420\pi$ cm²;
 - $g = 21$ cm și $\mathcal{A}_l = 609\pi$ cm²;
 - $g = 21$ cm și $\mathcal{A}_l = 609\pi$ cm²;
 - $g = 12$ cm și $\mathcal{A}_l = 336\pi$ cm².
- Aflați volumul conului unui con circular drept, dacă:
 - $\mathcal{A}_l = 351\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 520\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 364\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 560\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 609\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 1\,050\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 1\,209\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 2\,170\pi$ cm².
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, dacă:
 - $r = 15$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un sfert de disc;
 - $r = 15$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un semidisc;
 - $r = 17$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține 75% dintr-un disc.
- Aflați aria totală și volumul corpului obținut prin rotația în jurul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de 5 cm și 12 cm.

Sinteză

- Desfășurați un con circular drept cu: a) $r = 1,5$ cm și $g = 3$ cm; b) $r = 2,5$ cm și $g = 3,5$ cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu:
 - $r = 10$ cm și $g = 26$ cm;
 - $r = 14$ cm și $g = 50$ cm;
 - $r = 18$ cm și $g = 30$ cm.
- Aflați aria secțiunii axiale a unui con circular drept, dacă:
 - $h = 8$ cm și $g = 17$ cm;
 - $h = 21$ cm și $g = 29$ cm;
 - $h = 19$ cm și $g = 29$ cm.
- Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul bazei unui con circular drept, dacă:
 - $r = 12$ cm, $g = 20$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 9 cm;
 - $r = 18$ cm, $g = 20$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 6 cm;
 - $r = 16$ cm, $g = 34$ cm și distanța de la planul bazei până la planul de secțiune este 4 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept care se obține rotind un triunghi echilateral:
 - cu laturile de 26 cm, în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 18 cm, în jurul uneia dintre axele sale;
 - cu laturile de 32 cm, în jurul uneia dintre axele sale.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept care se obține rotind un triunghi dreptunghic:
 - cu catetele de 42 cm și 40 cm, în jurul catetei mai lungi;
 - cu catetele de 45 cm și 28 cm, în jurul catetei mai lungi.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept care se obține rotind un triunghi isoscel:
 - cu baza de 20 cm și un unghi alăturat ei de 30° , în jurul axei sale;
 - cu baza de 32 cm și un unghi alăturat ei de 45° , în jurul axei sale;
 - cu baza de 26 cm și un unghi alăturat ei de 60° , în jurul axei sale.
- Aflați aria totală și volumul conului circular drept, dacă:
 - $g = 29$ cm și $\mathcal{A}_l = 435\pi$ cm²;
 - $g = 22$ cm și $\mathcal{A}_l = 616\pi$ cm²;
 - $g = 27$ cm și $\mathcal{A}_l = 218\pi$ cm².
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi dreptunghic isoscel cu:
 - ipotenuza de 36 cm;
 - ipotenuza de 42 cm;
 - ipotenuza de 48 cm;
 - ipotenuza de 54 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi isoscel cu:
 - baza de 12 cm și mediana corespunzătoare ei de 7 cm;
 - baza de 24 cm și mediana corespunzătoare ei de 5 cm;
 - baza de 18 cm și mediana corespunzătoare ei de 9 cm.
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi isoscel cu:
 - baza de 20 cm și aria 140 cm²;
 - baza de 16 cm și aria 240 cm².
- Aflați volumul conului unui con circular drept, dacă:
 - $\mathcal{A}_l = 1\,224\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 1\,413\pi$ cm²;
 - $\mathcal{A}_l = 1\,216\pi$ cm² și $\mathcal{A}_t = 1\,577\pi$ cm²;
- Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept, dacă:
 - $r = 28$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un sfert de disc;
 - $r = 32$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un semidisc.
- Aflați aria totală și volumul corpului obținut prin rotația în jurul ipotenuzei a unui triunghi dreptunghic cu catetele de 8 cm și 15 cm.
- Aflați aria totală și volumul corpului obținut prin rotația în jurul laturii BC a triunghiului ABC cu înălțimea $AD = 20$ cm, unghiul B de 45° și unghiul C de 60° .

Evaluare

I

1. Desfășurați un con circular drept cu $r = 3$ cm și $g = 5$ cm. 10
2. Aflați aria laterală a conului circular drept, dacă $r = 18$ cm și $g = 82$ cm. 20
3. Aflați volumul conului circular drept, dacă $r = 23$ cm și $g = 28$ cm. 10
4. Aflați aria secțiunii axiale a unui con circular drept, dacă $h = 12$ cm și $g = 37$ cm. 10
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu $r = 20$ cm și $g = 29$ cm. 10
6. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza 38 cm. 10
7. Aflați aria totală și volumul conului circular drept, dacă $g = 41$ cm și $\mathcal{A}_l = 369\pi$ cm². 15
8. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi isoscel cu baza de 18 cm și aria 360 cm². 15

II

1. Desfășurați un con circular drept cu $r = 2,5$ cm și $g = 6$ cm.
2. Aflați aria laterală a conului circular drept, dacă $r = 24$ cm și $g = 74$ cm.
3. Aflați volumul conului circular drept, dacă $r = 22$ cm și $g = 28$ cm.
4. Aflați aria secțiunii axiale a unui con circular drept, dacă $h = 20$ cm și $g = 29$ cm.
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu $r = 12$ cm și $g = 37$ cm.
6. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza 36 cm.
7. Aflați aria totală și volumul conului circular drept, dacă $g = 50$ cm și $\mathcal{A}_l = 700\pi$ cm².
8. Aflați aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept cu secțiunea axială un triunghi isoscel cu baza de 20 cm și aria 360 cm².

Puncte	0–5	6–24	24–32	33–55	56–65	66–75	76–85	86–95	96–100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Problemă rezolvată

Triunghiul dreptunghic ABC se rotește în jurul ipotenuzei BC .

- a) Descrieți corpul care se obține. b) Aflați aria corpului care se obține.
c) Aflați volumul corpului care se obține, dacă: $AB = 20$ cm și $AC = 15$ cm.

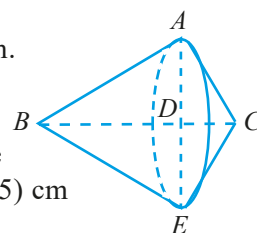
Rezolvare. a) Se obține un corp format din două conuri circulare drepte, care au aceeași bază.

b) Aria corpului este egală cu suma ariilor laterale ale conurilor din care e format corpul. $BC = 25$ cm (15, 20, 25 – triplet pitagoreic); $AD = (20 \cdot 15 : 25)$ cm = 12 cm; $BD = 16$ cm (12, 16, 20 – triplet pitagoreic); $DC = 9$ cm.

Conul cu secțiunea axială BAE (v. desenul) are: raza cercului bazei $r = AD$, înălțimea triunghiului dreptunghic ABC ; înălțimea $h = BD$, lungimea proiecției catetei AB pe ipotenuză; generatoarea $g = AB = 20$ cm. Aria laterală a conului este $= 12 \cdot 20\pi$ cm² = 240π cm². Conul cu secțiunea axială CAE (v. desenul) are aria laterală $= 12 \cdot 15\pi$ cm² = 180π cm². Aria corpului = 420π cm².

c) Volumul corpului este egal cu suma volumelor celor două conuri. $12^2 \cdot 16 + 12^2 \cdot 9 = 12^2 \cdot (16 + 9) = 144 \cdot 25 = 3\,600$. Volumul corpului este 3600π cm³.

Răspuns: b) 420π cm²; 3600π cm³.

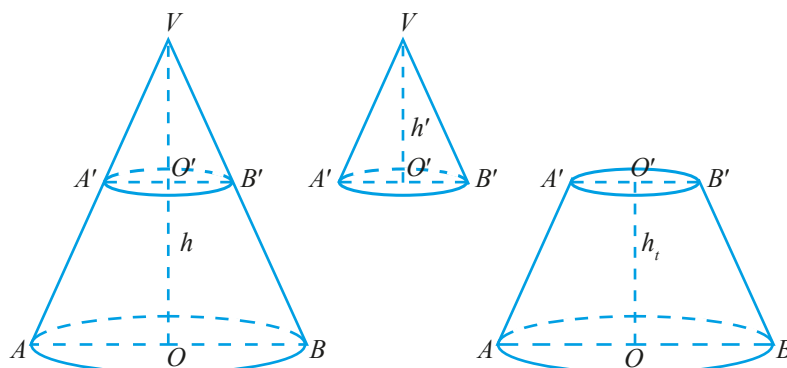


5. Trunchiul de con circular drept. (Facultativ)

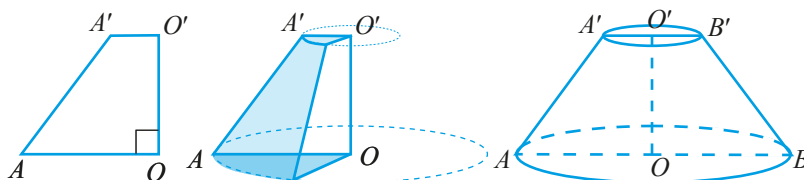


Multe dintre obiectele pe care le folosim amintesc de trunchiul de con circular drept.

Secționând conul de înălțime h cu un plan paralel cu planul bazei se obține un con de înălțime h' , asemenea cu cel inițial și un trunchi de con de înălțime h_t . Un trunchi de con se obține dintr-un con așa cum se obține un trunchi de piramidă dintr-o piramidă.

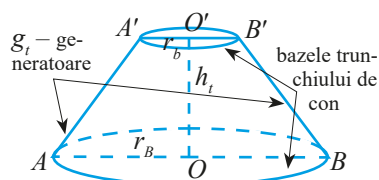


Generarea trunchiului de con circular drept. Rotind trapezul dreptunghic $OA'O'A'$ în jurul dreptei OO' , se obține un trunchi de con circular drept având secțiunea axială trapezul isoscel $ABB'A'$, raza bazei mari OA și raza bazei mici $O'A'$. Distanța dintre planele bazei este OO' , lungimea segmentului determinat de centrele bazelor. $[AA']$ și $[BB']$ sunt generatoare ale trunchiului de con circular drept.



Trunchiul de con circular drept are două baze (discuri circulare) cu centrele O și O' și razele r_B și r_b ; $h_t = OO'$ – distanța dintre planele bazelor; **generatoarele** AA' și BB' au lungimile g_t (este numită tot **generatoare**); pentru elementele trunchiului de con circular drept este adevărată propoziția: $(g_t)^2 = (r_B - r_b)^2 + (h_t)^2$.

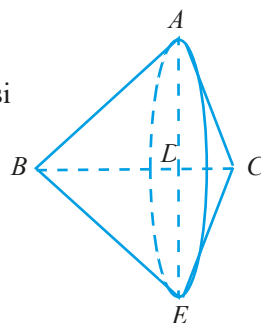
Trunchiul de con circular drept: are două baze (discuri circulare) cu centrele O și O' și razele r_B și r_b ; $h_t = OO'$ – distanța dintre planele bazelor; **generatoarele** AA' și BB' au lungimile g_t (este numită tot **generatoare**); pentru elementele trunchiului de con circular drept este adevărată propoziția: $(g_t)^2 = (r_B - r_b)^2 + (h_t)^2$.



Problemă rezolvată

Triunghiul ABC se rotește în jurul laturii BC . $m(\angle B) = 45^\circ$, $m(\angle C) = 60^\circ$ și $AD = 12$ cm. a) Aflați aria corpului care se obține. c) Aflați volumul corpului.

Rezolvare. Se obține un corp format din două conuri circulare drepte, care au aceeași bază. a) Aria corpului este egală cu suma ariilor laterale ale conurilor din care e format corpul. $AD = BD = 12$ cm; $AB = 12\sqrt{2}$ cm; $CD = (12 : \sqrt{3})$ cm = $4\sqrt{3}$ cm; $AC = 8\sqrt{3}$ cm; $DC = 9$ cm. Conul cu secțiunea axială BAE (v. desenul) are aria laterală = $12 \cdot 12\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2 = 144\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$. Conul cu secțiunea axială CAE are aria laterală = $12 \cdot 8\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2 = 96\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$. Aria corpului = $48(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$. b) Volumul corpului este egal cu suma volumelor celor două conuri = $(12^2 \cdot 12 + 12^2 \cdot 4\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3 = 576(3 + \sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$.



■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Trunchiul de con circular drept are două ...
 - Înălțimea ...
 - Înălțimea conului circular drept ...
 - $(g_r)^2 = \dots$
- Copiați și completați semnificațiile notațiilor: a) $r_B - \dots$ b) $r_b - \dots$ c) $h_t - \dots$ d) $g_t - \dots$
- Precizați ce se obține rotind:
 - un trapez dreptunghic în jurul laturii perpendiculare pe baze;
 - un trapez isoscel în jurul axei.
- Precizați ce se obține rotind:
 - în jurul axei un trunchi de piramidă triunghiulară regulată;
 - în jurul axei un trunchi de piramidă patrulateră regulată;
 - în jurul axei un trunchi de piramidă hexagonală regulată.
- Precizați relațiile dintre elementele:
 - trapezului dreptunghic și cele ale trunchiului de con circular drept ce se obține prin rotația lui în jurul laturii perpendiculare pe baze;
 - trapezului isoscel și cele ale trunchiului de con circular drept ce se obține prin rotația lui în jurul axei.
- Precizați relațiile dintre elementele:
 - trunchiului de piramidă triunghiulară regulată și cele ale trunchiului de con circular drept care se obține prin rotația lui în jurul axei;
 - trunchiului de piramidă patrulateră regulată și cele ale trunchiului de con circular drept care se obține prin rotația lui în jurul axei;
 - trunchiului de piramidă hexagonală regulată și cele ale trunchiului de con circular drept care se obține prin rotația lui în jurul axei.
- Un con circular drept se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei, egal depărtat de vârful și de planul bazei conului. Aflați elementele trunchiului de con, dacă:
 - $r = 8 \text{ cm}, h = 14 \text{ cm};$
 - $r = 16 \text{ cm}, h = 32 \text{ cm};$
 - $r = 18 \text{ cm}, h = 30 \text{ cm};$
 - $r = 11 \text{ cm}, h = 18 \text{ cm};$
 - $r = 9 \text{ cm}, h = 22 \text{ cm};$
 - $r = 38 \text{ cm}, h = 48 \text{ cm}.$
- Un con circular drept se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei, la distanța $0,3h$ de planul bazei conului. Aflați elementele trunchiului de con, dacă:
 - $r = 9 \text{ cm}, h = 27 \text{ cm};$
 - $r = 15 \text{ cm}, h = 36 \text{ cm};$
 - $r = 18 \text{ cm}, h = 33 \text{ cm}.$
- Un con circular drept se intersectează cu un plan paralel cu planul bazei, la distanța $0,25h$ de planul bazei conului. Aflați elementele trunchiului de con, dacă:
 - $r = 8 \text{ cm}, h = 40 \text{ cm};$
 - $r = 28 \text{ cm}, h = 48 \text{ cm};$
 - $r = 12 \text{ cm}, h = 36 \text{ cm}.$
- Recunoașteți ce se obține rotind un trapez isoscel în jurul mediatoarei bazelor trapezului.
- Recunoașteți ce se obține rotind un trapez dreptunghic în jurul bazei mari.
- Recunoașteți ce se obține rotind un trapez dreptunghic în jurul bazei mici.
- Recunoașteți ce se obține rotind un trapez isoscel în jurul bazei mari.
- Recunoașteți ce se obține rotind un trapez isoscel în jurul bazei mici.
- Laturile neparalele ale unui trapez sunt conținute de drepte perpendiculare. Recunoașteți ce se obține rotind trapezul în jurul uneia dintre laturile neparalele.
- Fie triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC . Recunoașteți ce se obține rotind triunghiul în jurul dreptei paralele cu BC , care conține punctul A .

6. Aria laterală, aria totală, volumul trunchiului de con circular drept. (Facultativ)

Aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept. Desfășurând suprafața laterală a trunchiului de

con circular drept cu generatoarea g_t și razele bazelor r_B și r_b , se obține un sector de coroană circulară determinată de cercurile de raze $g_t + g'$ și g' , unde g' este generatoarea conului care se formează o dată cu trunchiul de con din conul cu generatoarea $g_t + g'$. Legătura dintre piramida regulată și conul circular drept permite stabilirea unei legături corespunzătoare între trunchiul de piramidă regulată și trunchiul de con circular drept. Se aplică formula de calcul a ariei laterale pentru trunchiul de piramidă regulată $\mathcal{A}_l = 0,5(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_p$, unde $\mathcal{P}_B = 2\pi r_B$ și $\mathcal{P}_b = 2\pi r_b$, se obține aria laterală a trunchiului de con circular

drept $\mathcal{A}_l = \pi g_t(r_B + r_b)$. Ariile bazelor trunchiului de con circular drept sunt $\mathcal{A}_B = \pi(r_B)^2$ și $\mathcal{A}_b = \pi(r_b)^2$. Aria totală a trunchiului de con circular drept este: $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = \pi g_t(r_B + r_b) + \pi(r_B)^2 + \pi(r_b)^2$.

Teoremă. Un trunchi de con circular drept cu generatoarea g_t , razele bazelor r_B și r_b are:

$$\mathcal{A}_l = \pi g_t(r_B + r_b) \text{ și } \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b = \pi g_t(r_B + r_b) + \pi(r_B)^2 + \pi(r_b)^2.$$

Volumul trunchiului de con circular drept. Fie trunchiul de con circular drept cu înălțimea h_t și razele bazelor r_B și r_b .

Aplicând formula de calcul a volumului unui trunchi de piramidă regulată, $\frac{1}{3} h_t(\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b)$, se obține formula de calcul a volumului trunchiului de con circular drept. Ariile bazelor conului circular drept sunt:

$$\mathcal{A}_B = \pi(r_B)^2 \text{ și } \mathcal{A}_b = \pi(r_b)^2.$$

Prin urmare, volumul trunchiului de con circular drept este: $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi h_t [(r_B)^2 + r_B r_b + (r_b)^2]$.

Teoremă. Volumul unui trunchi de con circular drept cu înălțimea h_t , razele bazelor r_B și r_b este:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \pi h_t [(r_B)^2 + r_B r_b + (r_b)^2].$$

Secțiuni în trunchiul de con circular drept

a) Fie trunchiul de con circular drept cu înălțimea h_t , razele bazelor r_B și r_b . Intersectând trunchiul de con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei mari la distanța x de acesta, se obține un cerc de rază DE . Asemănarea triunghiurilor implică: $\frac{h'}{h' + h_t} = \frac{r_b}{r_B} \Rightarrow \frac{h'}{h_t} = \frac{r_b}{r_B - r_b}$ și $\frac{h' + h_t - x}{h' + h_t} = \frac{DE}{r_B}$.

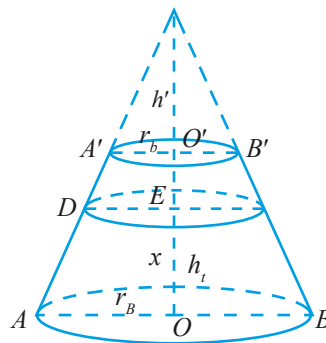
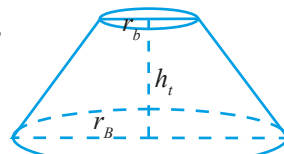
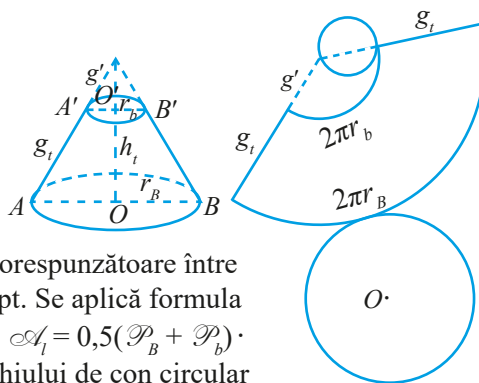
b) Intersectând trunchiul de con circular drept cu un plan care conține axa OO' a trunchiului, se obține trapezul isoscel $ABB'A'$. Între elementele trapezului și ale trunchiului este relația: $(g_t)^2 = (r_B - r_b)^2 + (h_t)^2$.

Problemă rezolvată

Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept, dacă $r_b = 9$ cm, $r_B = 16$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține o optime dintr-o coroană circulară;

Rezolvare. Fie g_1 generatoarea conului din care provine trunchiul și g_2 - a conului care se obține o dată cu trunchiul de con. Atunci $2\pi g_1 : 8 = 32\pi$ implică: $g_1 = 128$ cm, (1). Analog: $2\pi g_2 : 8 = 18\pi$ implică: $g_2 = 72$ cm, (2). $128 - 72 = 56$, (3). (1), (2) și (3) implică: $g_t = 56$ cm. $(g_t)^2 = (r_B - r_b)^2 + (h_t)^2$ implică: $h_t = 21\sqrt{7}$ cm.

$$\mathcal{A}_l = \pi g_t(r_B + r_b) = 1\,224\pi \text{ cm}^2 \text{ și } \mathcal{A}_t = \pi g_t(r_B + r_b) + \pi(r_B)^2 + \pi(r_b)^2 = 1\,737\pi \text{ cm}^2; \mathcal{V} = 4\,067\sqrt{7}\pi \text{ cm}^3.$$



■ Exerciții

1. Copiați și completați tabelul:

r_b (cm)	r_B (cm)	h_t (cm)	$(r_B - r_b)$ (cm)	g_t (cm)
	41	56	33	
4		28		53
	50		35	37
3		21		29

2. Desfășurați un trunchi de con circular drept cu:

a) $r_b = 2$ cm, $r_B = 3$ cm și $g_t = 4$ cm;

b) $r_b = 2$ cm, $r_B = 4$ cm și $g_t = 2,5$ cm.

3. Copiați și completați propozițiile adevărate:

a) Aria laterală a trunchiului de con circular drept ...

b) Aria totală a trunchiului de con circular drept ...

c) Volumul trunchiului de con circular drept ...

4. Aflați aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept cu:

a) $r_b = 2$ cm, $r_B = 3$ cm și $g_t = 4$ cm;

b) $r_b = 2$ cm, $r_B = 4$ cm și $g_t = 2,5$ cm;

c) $r_b = 5$ cm, $r_B = 7$ cm și $g_t = 9$ cm;

d) $r_b = 8$ cm, $r_B = 12$ cm și $g_t = 5$ cm.

5. Aflați volumul trunchiului de con circular drept cu:

a) $r_b = 5$ cm, $r_B = 9$ cm și $h_t = 3$ cm;

b) $r_b = 9$ cm, $r_B = 11$ cm și $h_t = 8$ cm;

c) $r_b = 6$ cm, $r_B = 14$ cm și $h_t = 12$ cm;

d) $r_b = 6$ cm, $r_B = 12$ cm și $h_t = 9$ cm.

6. Aflați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, dacă:

a) $r_b = 3$ cm, $r_B = 7$ cm și $g_t = 5$ cm;

b) $r_b = 5$ cm, $r_B = 10$ cm și $g_t = 13$ cm;

c) $r_b = 3$ cm, $r_B = 11$ cm și $g_t = 17$ cm;

d) $r_b = 3$ cm, $r_B = 15$ cm și $g_t = 37$ cm.

7. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept ce se obține rotind un trapez dreptunghic:

a) cu bazele de 9 cm, 6 cm și înălțimea 4 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze;

b) cu bazele de 11 cm, 17 cm și înălțimea 12 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze;

c) cu bazele de 15 cm, 22 cm și înălțimea 24 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze;

d) cu bazele de 7 cm, 15 cm și înălțimea 15 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze.

8. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept ce se obține rotind un trapez isoscel:

a) cu bazele de 10 cm, 14 cm și un unghi de 30° , în jurul axei;

b) cu bazele de 9 cm, 17 cm și un unghi de 45° , în jurul axei;

c) cu bazele de 13 cm, 19 cm și un unghi de 60° , în jurul axei.

9. Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul bazei mari a unui trunchi de con circular drept, dacă:

a) $r_b = 4$ cm, $r_B = 12$ cm, $h_t = 12$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 8 cm;

b) $r_b = 3$ cm, $r_B = 15$ cm, $h_t = 8$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 4 cm;

c) $r_b = 4$ cm, $r_B = 24$ cm, $h_t = 15$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 5 cm.

10. Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept, dacă:

a) $r_b = 5$ cm, $r_B = 10$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține un sfert de coroană circulară;

b) $r_b = 8$ cm, $r_B = 12$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține o jumătate de coroană circulară;

c) $r_b = 12$ cm, $r_B = 18$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține 45% dintr-o coroană circulară.

d) $r_b = 8$ cm, $r_B = 24$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține 75% dintr-o coroană circulară.

Sinteză (Facultativ)

1. Copiați și completați tabelul:

r_b (cm)	r_B (cm)	h_t (cm)	$(r_B - r_b)$ (cm)	g_t (cm)
	18	84	13	
23		36		85
	100		72	97

2. Aflați aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept cu:

- a) $r_b = 9$ cm, $r_B = 14$ cm și $g_t = 9$ cm;
 b) $r_b = 6$ cm, $r_B = 18$ cm și $g_t = 16$ cm;
 c) $r_b = 7$ cm, $r_B = 21$ cm și $g_t = 15$ cm.

3. Aflați volumul trunchiului de con circular drept cu:

- a) $r_b = 6$ cm, $r_B = 8$ cm și $h_t = 9$ cm;
 b) $r_b = 4$ cm, $r_B = 10$ cm și $h_t = 15$ cm;
 c) $r_b = 8$ cm, $r_B = 18$ cm și $h_t = 24$ cm;
 d) $r_b = 9$ cm, $r_B = 16$ cm și $h_t = 21$ cm.

4. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept cu:

- a) $r_b = 6$ cm, $r_B = 11$ cm și $h_t = 12$ cm;
 b) $r_b = 3$ cm, $r_B = 16$ cm și $h_t = 84$ cm;
 c) $r_b = 7$ cm, $r_B = 15$ cm și $h_t = 26$ cm;
 d) $r_b = 3$ cm, $r_B = 42$ cm și $h_t = 80$ cm.

5. Aflați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, dacă:

- a) $r_b = 4$ cm, $r_B = 11$ cm și $g_t = 25$ cm;
 b) $r_b = 10$ cm, $r_B = 23$ cm și $g_t = 85$ cm;
 c) $r_b = 18$ cm, $r_B = 34$ cm și $g_t = 65$ cm;
 d) $r_b = 3$ cm, $r_B = 39$ cm și $g_t = 85$ cm.

6. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept care se obține rotind un trapez dreptunghic:

- a) cu bazele de 20 cm, 5 cm și înălțimea 8 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze;
 b) cu bazele de 7 cm, 40 cm și înălțimea 56 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze;
 c) cu bazele de 15 cm, 60 cm și înălțimea 28 cm, în jurul laturii perpendiculare pe baze.

7. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept care se obține rotind un trapez isoscel:

- a) cu bazele de 16 cm, 40 cm și înălțimea 48 cm, în jurul axei;
 b) cu bazele de 12 cm, 30 cm și înălțimea 80 cm, în jurul axei;
 c) cu bazele de 15 cm, 30 cm și înălțimea 36 cm, în jurul axei.

8. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept care se obține rotind un trapez isoscel:

- a) cu bazele de $8\sqrt{3}$ cm, $12\sqrt{3}$ cm și un unghi de 30° , în jurul axei;
 b) cu bazele de 5 cm, 21 cm și un unghi de 45° , în jurul axei;
 c) cu bazele de 8 cm, 18 cm și un unghi de 60° , în jurul axei.

9. Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul unei baze a unui trunchi de con circular drept, dacă:

- a) $r_b = 4$ cm, $r_B = 32$ cm, $h_t = 45$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 9 cm;
 b) $r_b = 9$ cm, $r_B = 45$ cm, $h_t = 77$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 7 cm;
 c) $r_b = 2$ cm, $r_B = 50$ cm, $h_t = 55$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 11 cm.

10. Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept, dacă:

- a) $r_b = 2$ cm, $r_B = 50$ cm, $h_t = 55$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține un sfert de coroană circulară;
 b) $r_b = 4$ cm, $r_B = 43$ cm, $h_t = 80$ cm și prin desfășurarea suprafeței laterale se obține trei sferturi de coroană circulară.

Evaluare

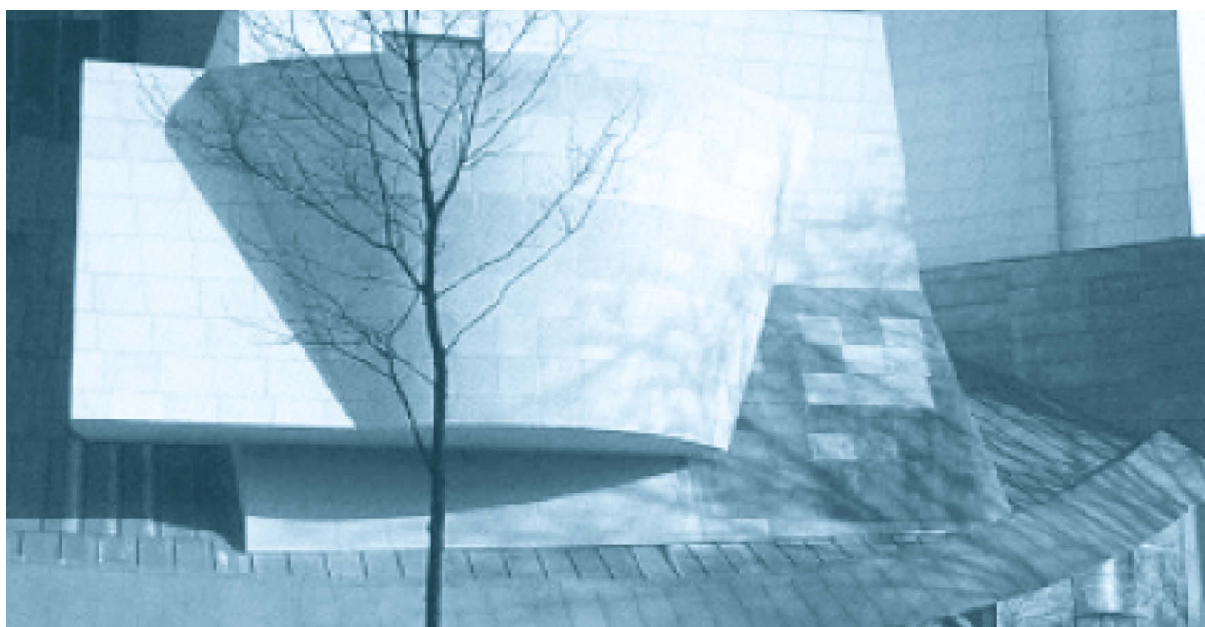
I

1. Fie un trunchi de con circular drept. Aflați h_t , dacă $r_b = 4$ cm, $r_B = 32$ cm, $g_t = 53$ cm.
2. Aflați aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept cu $r_b = 4$ cm, $r_B = 12$ cm și $g_t = 14$ cm.
3. Aflați volumul trunchiului de con circular drept cu $r_b = 9$ cm, $r_B = 12$ cm și $h_t = 15$ cm.
4. Aflați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, dacă $r_b = 21$ cm, $r_B = 28$ cm și $g_t = 25$ cm.
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept cu $r_b = 13$ cm, $r_B = 22$ cm și $h_t = 40$ cm.
6. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept cu secțiunea axială un trapez isoscel cu bazele 36 cm, 12 cm și înălțimea 35 cm.
7. Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul unei baze a unui trunchi de con circular drept, dacă $r_b = 7$ cm, $r_B = 16$ cm, $h_t = 40$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 10 cm

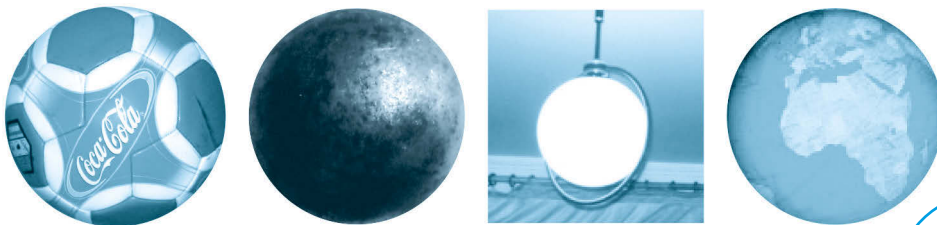
II

1. Fie un trunchi de con circular drept. Aflați h_t , dacă $r_b = 4$ cm, $r_B = 20$ cm, $g_t = 65$ cm.
2. Aflați aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept cu $r_b = 3$ cm, $r_B = 15$ cm și $g_t = 16$ cm.
3. Aflați volumul trunchiului de con circular drept cu $r_b = 8$ cm, $r_B = 14$ cm și $h_t = 18$ cm.
4. Aflați aria secțiunii axiale a unui trunchi de con circular drept, dacă $r_b = 22$ cm, $r_B = 32$ cm și $g_t = 29$ cm.
5. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept cu $r_b = 12$ cm, $r_B = 24$ cm și $h_t = 35$ cm.
6. Aflați aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept cu secțiunea axială un trapez isoscel cu bazele 40 cm, 8 cm și înălțimea 30 cm.
7. Aflați aria unei secțiuni paralele cu planul unei baze a unui trunchi de con circular drept, dacă $r_b = 4$ cm, $r_B = 16$ cm, $h_t = 35$ cm și distanța de la planul bazei mari până la planul de secțiune este 7 cm.

Puncte	0–5	6–24	24–32	33–55	56–65	66–75	76–85	86–95	96–100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

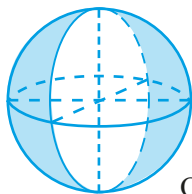
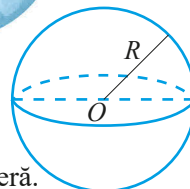


7. Sfera. Elementele unei sfere



Sfera se recunoaște în multe dintre obiectele din jur.

Sfera de centru O și rază R , $\mathcal{S}(O, R)$ este mulțimea punctelor spațiului situate la distanța R de punctul O .



Generarea sferei. Rotind un cerc în jurul unui diametru se obține o sferă.

Pozițiile unei drepte față de o sferă. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Distanța de la O la o dreaptă este distanța de la punctul O la proiecția acestuia pe dreaptă.

O dreaptă este **exterioară** unei sfere dacă nu are puncte comune cu sfera.

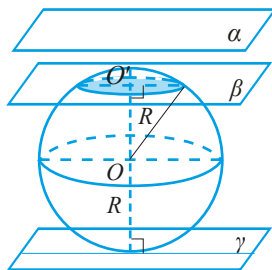
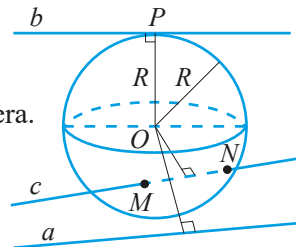
O dreaptă este **tangentă** sferei, dacă are un punct comun cu sfera.

O dreaptă este **secantă** sferei, dacă are două puncte comune cu sfera.

Teoremă. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. 1) Dreapta a este exterioară sferei, dacă și numai dacă $d(O, a) > R$.

2) Dreapta b este tangentă sferei, dacă și numai dacă $d(O, b) = R$.

3) Dreapta c este secantă sferei, dacă și numai dacă $d(O, c) < R$.



Pozițiile unui plan față de o sferă. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Distanța de la O la un plan este distanța de la punctul O la proiecția acestuia pe plan.

Un plan este **exterior** sferei, dacă nu are puncte comune cu sfera.

Un plan este **tangent** sferei, dacă are un singur punct comun cu sfera.

Un plan este **secant** sferei dacă are puncte comune cu sfera (mai mult de unul singur). Se constată că toate punctele sferei comune cu planul β se află la aceeași distanță de $O' = \text{pr}_\beta O$.

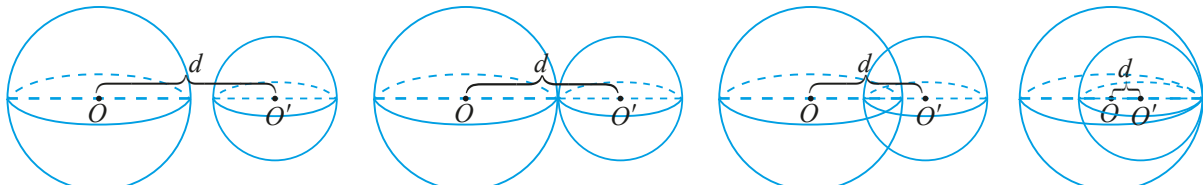
Teoremă. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. 1) Planul α este exterior sferei, dacă și numai dacă $d(O, \alpha) > R$. 2) Planul β este tangent sferei, dacă și numai dacă $d(O, \beta) = R$.

3) Planul γ este secant sferei, dacă și numai dacă $d(O, \gamma) < R$.

Teoremă. Intersecția unui plan secant cu o sferă este un cerc.

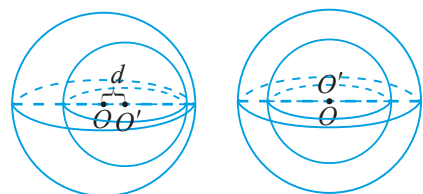
Se numește **cerc mare** al sferei un cerc care se obține prin secționarea sferei cu un plan care conține centrul sferei.

Suplimentar. Pozițiile relative a două sfere



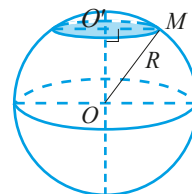
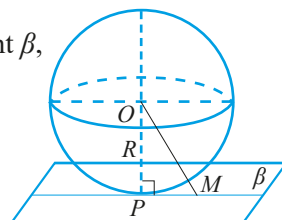
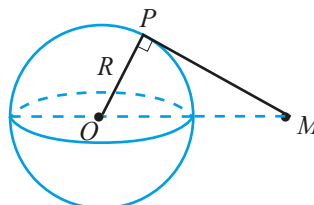
Teoremă. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și $\mathcal{S}(O', R')$, $d = OO'$.

Atunci 1) $d > R + R' \Leftrightarrow$ sferele sunt **exterioare**; 2) $d = R + R' \Leftrightarrow$ sferele sunt **tangente exterioare**; 3) $|R - R'| < d < R + R' \Leftrightarrow$ sferele sunt secante; 4) $d = |R - R'| \Leftrightarrow$ sferele sunt **tangente interioare**; 5) $0 < d < |R - R'| \Leftrightarrow$ sferele sunt **interioare**; 6) $d = 0 \Leftrightarrow$ sferele sunt **concentrice**.



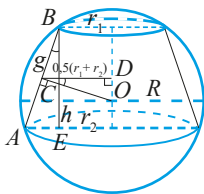
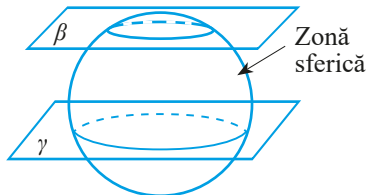
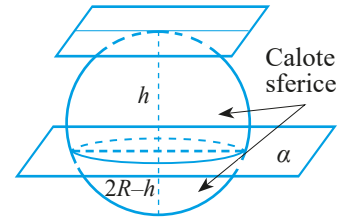
■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate: a) Sfera de centru O și rază R ...
b) O dreaptă este exterioară unei sfere ... c) O dreaptă este tangentă unei sfere ...
d) O dreaptă este secantă unei sfere ... e) Se numește cerc mare al sferei ...
- Fie sfera $\mathcal{A}(O, R)$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Dreapta a este exterioară sferei dacă și numai dacă ...
b) Dreapta b este tangentă sferei dacă și numai dacă ...
c) Dreapta c este secantă sferei dacă și numai dacă ...
- Fie sfera $\mathcal{A}(O, R)$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Un plan este exterior unei sfere ... c) Un plan este secant unei sfere ...
b) Un plan este tangent unei sfere ...
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Planul α este exterior sferei ... b) Planul β este tangent sferei ... c) Planul γ este secant sferei ...
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Reprezentați sfera, dacă: a) $R = 3$ cm; b) $R = 2,5$ cm; c) $R = 3,2$ cm; d) $R = 2$ cm.
- Copiați și completați propozițiile adevărate:
a) Prin rotația unui semicerc în jurul unui diametru se obține ...
b) Prin rotația unui cerc în jurul unui diametru se obține ...
- Aflați lungimea tangentei dintr-un punct exterior la $\mathcal{A}(O, R)$, dacă:
a) $R = 15$ cm și $OM = 28$ cm;
b) $R = 9$ cm și $OM = 16$ cm;
c) $R = 12$ cm și $OM = 28$ cm;
d) $R = 16$ cm și $OM = 31$ cm.
- Aflați distanța de la centrul sferei $\mathcal{A}(O, R)$ la secanta AB (A și B sunt punctele în care dreapta intersectează $\mathcal{A}(O, R)$), dacă:
a) $R = 9$ cm și $AB = 6$ cm; b) $R = 12$ cm și $AB = 8$ cm;
c) $R = 15$ cm și $AB = 10$ cm; d) $R = 18$ cm și $AB = 4$ cm.
- Aflați distanța de la centrul sferei $\mathcal{A}(O, R)$ la un punct M al planului tangent β , dacă:
a) $R = 12$ cm și $PM = 11$ cm;
b) $R = 18$ cm și $PM = 14$ cm;
c) $R = 21$ cm și $PM = 5$ cm;
d) $R = 15$ cm și $PM = 9$ cm.
- Aflați raza cercului obținut prin intersectarea unui plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$, dacă:
a) $R = 24$ cm și $OO' = 9$ cm;
b) $R = 16$ cm și $OO' = 7$ cm;
c) $R = 23$ cm și $OO' = 11$ cm;
d) $R = 18$ cm și $OO' = 5$ cm.
- Aflați aria cercului de secțiune obținut prin intersectarea unui plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$, dacă:
a) $R = 28$ cm și $OO' = 4$ cm; b) $R = 17$ cm și $OO' = 8$ cm;
c) $R = 26$ cm și $OO' = 15$ cm; d) $R = 31$ cm și $OO' = 12$ cm.
- Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ până la un plan secant, dacă:
a) $R = 25$ cm și raza cercului de intersecție este $R' = 7$ cm; b) $R = 41$ cm și $R' = 9$ cm;
c) $R = 65$ cm și $R' = 16$ cm; d) $R = 53$ cm și $R' = 28$ cm.
- Aflați volumul conului care are vârful în centrul sferei $\mathcal{A}(O, R)$ și baza lui este intersecția ei cu un plan, dacă:
a) $R = 26$ cm și distanța de la O până la planul secant este $d = 24$ cm; b) $R = 25$ cm și $d = 24$ cm.



8. Zona și calota sferică. Aria și volumul sferei

Calote sferice. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Planul α intersectează $\mathcal{S}(O, R)$, determinând două calote sferice. Dacă planul α conține centrul sferei, O , atunci cele două calote sunt **semisfere**. Ecuatorul determină cele două **emisfere ale Pământului**: nordică și sudică. Amintim și termenul de **calotă glaciară**. Înălțimea unei calote este distanța dintre două plane paralele, cel care determină calota și un plan tangent la sferă. Dacă una dintre



calote are înălțimea h , cealaltă are înălțimea $h_1 = 2R - h$.

Zonă sferică. Fie sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Planele paralele β și γ determină o **zonă sferică**.

Pe Pământ zona ecuatorială este delimitată de Tropicul Racului și de Tropicul Capricornului.

Aria zonei sferice. Aria zonei ilustrate se aproximează cu aria laterală a trunchiului de con cu elementele din desen.

$$\mathcal{A}_l = \pi g(r_1 + r_2) = 2\pi g \cdot 0,5(r_b + r_b), (1).$$

Asemănarea triunghiurilor dreptunghice AEB și ODC implică:

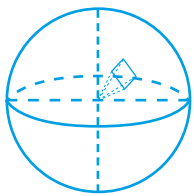
$$g \cdot 0,5(r_b + r_b) = h \cdot OC, (2).$$

Dacă se împarte zona, construind între cele două plane 9 plane paralele, atunci aria zonei se poate aproxima cu ariile laterale a 10 trunchiuri cu înălțimi de $0,1h$.

$\mathcal{A}_l = 2\pi \cdot OC_1 \cdot 0,1h + 2\pi \cdot OC_2 \cdot 0,1h + \dots + 2\pi \cdot OC_{10} \cdot 0,1h, (3).$ $OC_1, OC_2, \dots, OC_{10}$ sunt aproximații ale razei sferei, R . Cu cât numărul planelor este mai mare, cu atât valorile corespunzătoare ale $OC_1, OC_2, \dots$ sunt mai apropiate de R . Se obține astfel aria zonei, $\mathcal{A} = 2\pi Rh$.

Aria calotei sferice. Aria sferei. Pentru aria unei calote sferice de înălțime h a $\mathcal{S}(O, R)$ se găsește aceeași formulă, $\mathcal{A}_1 = 2\pi Rh$. În același timp cu o calotă de înălțime h se obține și alta de înălțime $h_1 = 2R - h$. Aria acesteia este $\mathcal{A}_2 = 2\pi R(2R - h)$.

Aria sferei este $\mathcal{A} = 2\pi Rh + 2\pi R(2R - h)$, de unde $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.



Volumul sferei. $\mathcal{S}(O, R)$ poate fi descompusă într-un număr oricât de mare de piramide cu vârful în O având baze echivalente și înălțimi egale, aproximând cât se dorește de bine R . Volumul fiecărei piramide este aproximativ egal cu $\frac{1}{3} \mathcal{A}_b R$.

Volumul sferei este aproximativ egal cu suma volumelor tuturor acestor piramide și se obține $\frac{1}{3} \mathcal{A} R$, unde $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ este aria suprafeței sferei. Rezultă $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Un plan secant cu $\mathcal{S}(O, R)$ determină două **calote** una de înălțime h , alta de înălțime $h_1 = 2R - h$. Două plane paralele determină cu $\mathcal{S}(O, R)$ o **zonă** de înălțime h – distanța dintre cele două plane.

Teoremă. Fie $\mathcal{S}(O, R)$. Aria calotei de înălțime h este $\mathcal{A} = 2\pi Rh$. Aria zonei de înălțime h este $\mathcal{A} = 2\pi Rh$. Aria suprafeței sferei este $\mathcal{A} = 4\pi R^2$. Volumul sferei este $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Formule pentru corpurile de rotație

Cilindrul circular drept: $\mathcal{A}_l = 2\pi rg$; $\mathcal{A}_t = 2\pi r(g + r)$; $\mathcal{A}_b = \pi r^2$; $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h = \pi r^2 h$. Notății: r – razele cercurilor bazelor; h – înălțimea cilindrului; g – generatoarea cilindrului; $h = g$.

Conul circular drept: $\mathcal{A}_l = \pi rg$; $\mathcal{A}_t = \pi r(g + r)$; $\mathcal{A}_b = \pi r^2$; $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

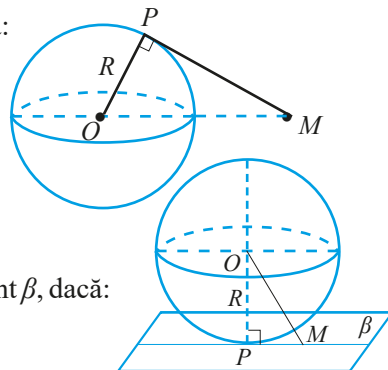
Sfera: $\mathcal{A} = 4\pi R^2$; aria zonei sau calotei de înălțime h este $\mathcal{A} = 2\pi Rh$; $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

■ Exerciții

- Copiați și completați propozițiile adevărate:
 - Un plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$ determină ...
 - Două plane paralele determină cu $\mathcal{A}(O, R)$...
 - Aria calotei de înălțime h ...
 - Aria zonei de înălțime h ...
 - Volumul sferei ...
- Aflați aria unei sfere, dacă: a) $R = 12$ cm; b) $R = 8$ cm; c) $R = 11$ cm; d) $R = 9$ cm.
- Aflați aria suprafeței:
 - Pământului, considerând diametrul lui de 12 756 km;
 - planetei Mercur, considerând diametrul ei de 4 800 km;
 - planetei Venus, considerând diametrul ei de 12 100 km;
 - planetei Marte, considerând diametrul ei de 6 800 km.
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria calotei de înălțime h , dacă:
 - $R = 12$ cm, $h = 5$ cm;
 - $R = 18$ cm, $h = 4$ cm;
 - $R = 17$ cm, $h = 3$ cm;
 - $R = 15$ cm, $h = 8$ cm.
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria zonei de înălțime h , dacă:
 - $R = 35$ cm, $h = 12$ cm;
 - $R = 21$ cm, $h = 9$ cm;
 - $R = 32$ cm, $h = 15$ cm;
 - $R = 22$ cm, $h = 13$ cm.
- Aflați volumul unei sfere, dacă: a) $R = 18$ cm; b) $R = 25$ cm; c) $R = 24$ cm; d) $R = 27$ cm.
- Aflați volumul:
 - Pământului, considerând diametrul lui de 12 756 km;
 - planetei Mercur, considerând diametrul ei de 4 800 km;
 - planetei Venus, considerând diametrul ei de 12 100 km;
 - planetei Marte, considerând diametrul ei de 6 800 km.
- Aflați volumul sferei, dacă:
 - aria ei este 576π ;
 - aria ei este 900π ;
 - aria ei este $1\,156\pi$;
 - aria ei este $1\,764\pi$.
- Aflați înălțimea unui cilindru circular drept cu raza bazelor r , echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $R = 6$ cm și $r = 8$ cm;
 - $R = 9$ cm și $r = 5$ cm;
 - $R = 12$ cm și $r = 15$ cm;
 - $R = 14$ cm și $r = 16$ cm.
- Aflați înălțimea unui con circular drept cu raza bazei r , echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $R = 18$ cm și $r = 20$ cm;
 - $R = 24$ cm și $r = 15$ cm;
 - $R = 21$ cm și $r = 15$ cm;
 - $R = 27$ cm și $r = 18$ cm.
- Într-o cutie de forma unui cub se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul conului și al sferei, dacă cubul are o diagonală de: a) $5\sqrt{3}$ cm; b) $10\sqrt{3}$ cm; c) $12\sqrt{3}$ cm.
- Într-o cutie de forma unui cilindru circular drept se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul cilindrului și cel al sferei, dacă secțiunea axială a cilindrului este un pătrat cu diagonala de: a) $4\sqrt{2}$ cm; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) $9\sqrt{2}$ cm.
- Într-o cutie de forma unui con circular drept se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul conului și cel al sferei, dacă conul are:
 - $r = 5$ cm și $h = 12$ cm;
 - $r = 7$ cm și $h = 24$ cm;
 - $r = 8$ cm și $h = 15$ cm.
- Aflați înălțimea unui trunchi de con circular drept, echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $r_b = 6$ cm, $r_B = 24$ cm și $R = 8$ cm;
 - $r_b = 8$ cm, $r_B = 72$ cm și $R = 15$ cm;
 - $r_b = 3$ cm, $r_B = 12$ cm și $R = 9$ cm;
 - $r_b = 4$ cm, $r_B = 9$ cm și $R = 12$ cm.
- O minge cu diametrul de a cm se introduce într-o cutie de forma unui trunchi de con circular drept cu $r_b = b$ cm. Aflați r_B , astfel încât volumul trunchiului să fie minim, dacă:
 - $a = 12$ cm și $b = 15$ cm;
 - $a = 24$ cm și $b = 10$ cm;
 - $a = 30$ cm și $b = 16$ cm
- Într-o cutie de forma unei piramide patrulater regulate cu secțiunea care conține apotemele a două fețe opuse un triunghi echilateral cu laturile de a cm, se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei, dacă: a) $a = 50$ cm; b) $a = 8$ dm; c) $a = 12$ cm.
- Într-o cutie de forma unei piramide triunghiulare regulate se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei, dacă piramida are:
 - muchia bazei $a = 12$ cm și înălțimea $h = 15$ cm;
 - muchia bazei $a = 18$ cm și înălțimea $h = 24$ cm.

Sinteză

- Aflați lungimea tangentei dintr-un punct exterior la $\mathcal{A}(O, R)$, dacă:
 - $R = 8$ cm și $OM = 35$ cm;
 - $R = 13$ cm și $OM = 38$ cm.
- Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la secanta AB (A și B sunt punctele în care dreapta intersectează $\mathcal{A}(O, R)$), dacă:
 - $R = 10$ cm și $AB = 18$ cm;
 - $R = 21$ cm și $AB = 36$ cm.
- Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la un punct M al planului tangent β , dacă:
 - $R = 22$ cm și $PM = 4$ cm;
 - $R = 26$ cm și $PM = 5$ cm.
- Aflați aria cercului de secțiune obținut prin intersectarea unui plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$ (OO' – distanța de la centrul sferei la planul secant), dacă:
 - $R = 43$ cm și $OO' = 7$ cm;
 - $R = 27$ cm și $OO' = 15$ cm;
 - $R = 34$ cm și $OO' = 16$ cm.
- Aflați aria unei sfere, dacă: a) $R = 32$ cm; b) $R = 45$ cm.
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria calotei de înălțime h , dacă:
 - $R = 19$ cm, $h = 24$ cm;
 - $R = 27$ cm și $h = 23$ cm;
 - $R = 46$ cm, $h = 44$ cm.
- Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria zonei de înălțime h , dacă:
 - $R = 56$ cm, $h = 60$ cm;
 - $R = 77$ cm și $h = 73$ cm;
 - $R = 86$ cm, $h = 84$ cm.
- Aflați volumul unei sfere, dacă: a) $R = 11$ cm; b) $R = 13$ cm.; c) $R = 15$ cm.
- Aflați volumul sferei, dacă: a) aria ei este $2\ 116\pi$; b) aria ei este $2\ 916\pi$.
- Aflați înălțimea unui cilindru circular drept cu raza bazelor r , echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $R = 16$ cm și $r = 12$ cm;
 - $R = 24$ cm și $r = 18$ cm;
 - $R = 25$ cm și $r = 15$ cm.
- Aflați înălțimea unui con circular drept cu raza bazei r , echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $R = 28$ cm și $r = 16$ cm;
 - $R = 34$ cm și $r = 24$ cm;
 - $R = 18$ cm și $r = 12$ cm.
- Într-o cutie de forma unui cub se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul conului și al sferei, dacă cubul are o diagonală de: a) $8\sqrt{3}$ cm; b) $9\sqrt{3}$ cm; c) $15\sqrt{3}$ cm.
- Într-o cutie de forma unui cilindru circular drept se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul cilindrului și cel al sferei, dacă secțiunea axială a cilindrului este un pătrat cu o diagonală de: a) $8\sqrt{2}$ cm; b) $12\sqrt{2}$ cm; c) $15\sqrt{2}$ cm.
- Într-o cutie de forma unui con circular drept se introduce o sferă. Aflați care este raza maximă a sferei și diferența dintre volumul conului și cel al sferei, dacă conul are:
 - $r = 10$ cm și $h = 24$ cm;
 - $r = 14$ cm și $h = 48$ cm;
 - $r = 16$ cm și $h = 30$ cm.
- Aflați înălțimea unui trunchi de con circular drept, echivalent cu o sferă de rază R , dacă:
 - $r_b = 5$ cm, $r_B = 14$ cm și $R = 26$ cm;
 - $r_b = 6$ cm, $r_B = 18$ cm și $R = 32$ cm.
- Un glob cu diametrul de 44 cm se introduce într-o cutie de forma unui trunchi de con circular drept cu $r_b = 25$ cm. Aflați r_B , astfel încât volumul trunchiului să fie minim
- Într-o cutie de forma unei piramide regulate patrulateră cu secțiunea care conține apotemele a două fețe opuse un triunghi echilateral cu laturile de 60 cm se introduce o sferă. Care este raza maximă a sferei?
- Într-o cutie de forma unui tetraedru regulat cu muchiile de 48 cm se introduce o sferă. Care este raza maximă a sferei?
- Într-o cutie de forma unei piramide triunghiulare regulate cu muchiile bazei de 15 cm și înălțimea de 18 cm se introduce o sferă. Care este raza maximă a sferei?



Evaluare

I

1. Aflați aria unei sfere, dacă $R = 38$ cm.
2. Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria calotei de înălțime h , dacă:

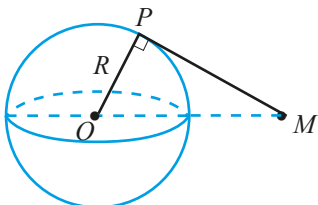
$$R = 24 \text{ cm}, h = 35 \text{ cm}.$$

3. Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria zonei de înălțime h , dacă:

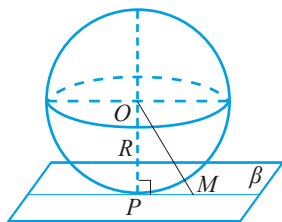
$$R = 33 \text{ cm}, h = 26 \text{ cm}.$$

4. Aflați volumul sferei, dacă aria ei este $2\,916\pi$.

5. Aflați lungimea tangentei dintr-un punct exterior la $\mathcal{A}(O, R)$, dacă $R = 15$ cm și $OM = 72$ cm.



6. Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la secanta AB (A și B sunt punctele în care dreapta intersectează $\mathcal{A}(O, R)$), dacă $R = 46$ cm și $AB = 52$ cm.
7. Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la un punct M al planului tangent β , dacă $R = 35$ cm și $PM = 12$ cm.



8. Aflați aria secțiunii obținute prin intersectarea unui plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$, dacă $R = 46$ cm și $OO' = 24$ cm (OO' – distanța de la centrul sferei la planul secant).
9. Aflați înălțimea unui cilindru circular drept cu raza bazelor r echivalent cu o sferă de rază R , dacă $R = 24$ cm și $r = 18$ cm.

II

1. Aflați aria unei sfere, dacă $R = 36$ cm.

2. Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria calotei de înălțime h , dacă:

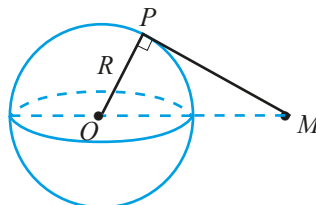
$$R = 23 \text{ cm}, h = 36 \text{ cm}.$$

3. Fie $\mathcal{A}(O, R)$. Aflați aria zonei de înălțime h , dacă:

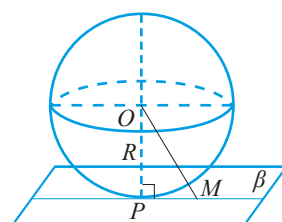
$$R = 35 \text{ cm}, h = 24 \text{ cm}.$$

4. Aflați volumul sferei, dacă aria ei este $3\,136\pi$.

5. Aflați lungimea tangentei dintr-un punct exterior la $\mathcal{A}(O, R)$, dacă $R = 16$ cm și $OM = 70$ cm.



6. Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la secanta AB (A și B sunt punctele în care dreapta intersectează $\mathcal{A}(O, R)$), dacă $R = 47$ cm și $AB = 50$ cm.
7. Aflați distanța de la centrul $\mathcal{A}(O, R)$ la un punct M al planului tangent β , dacă $R = 33$ cm și $PM = 14$ cm.



8. Aflați aria secțiunii obținute prin intersectarea unui plan secant cu $\mathcal{A}(O, R)$, dacă $R = 48$ cm și $OO' = 22$ cm (OO' – distanța de la centrul sferei la planul secant).
9. Aflați înălțimea unui cilindru circular drept cu raza bazelor r echivalent cu o sferă de rază R , dacă $R = 18$ cm și $r = 24$ cm.

Puncte	0–5	6–24	24–32	33–55	56–65	66–75	76–85	86–95	96–100
Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Suplimentar

1. Fie tetraedrul $ABCD$. Punctele E, F, G, H, I, J sunt respectiv mijloacele laturilor: AB, BC, CD, AD, BD, AC . Demonstrați că segmentele determinate de mijloacele laturilor opuse ale tetraedrului au un punct comun.
2. Fie cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu muchiile de 7 cm. Se cere aria triunghiului $BC_1 A_1$.
3. Fie cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu muchiile de 4 cm. M este mijlocul muchiei $A_1 D_1$, N – mijlocul muchiei $A_1 B_1$. Aflați aria patrulaterului $BNMD$.
4. Fie prisma regulată dreaptă $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu volumul de 36 cm^3 și înălțimea de 6 cm. Aflați măsura unghiului format de o diagonală a prisme cu planul bazei.
5. Fie prisma regulată dreaptă $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu aria laterală $128\sqrt{2} \text{ cm}^2$ și înălțimea de $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Aflați măsura unghiului format de planul $A_1 BD$ cu planul bazei.
6. Fie piramida regulată $VABCD$ cu triunghiul VAC dreptunghic și înălțimea VO de $8\sqrt{2} \text{ cm}$. Aflați:
 - a) aria laterală; b) aria totală; c) volumul piramidei;
 - d) tgnta unghiului format de o față laterală cu planul bazei;
 - e) raza sferei circumscrise piramidei; f) raza sferei înscrise în piramidă.
7. Fie piramida regulată $VABC$ cu înălțimea VO de $10\sqrt{3} \text{ cm}$ și unghiului format de o față laterală cu planul bazei de 60° . Aflați:
 - a) aria laterală; b) aria totală; c) volumul piramidei;
 - d) raza sferei circumscrise piramidei; e) raza sferei înscrise în piramidă.
8. Într-o cutie sferică se introduce un cub cu muchiile de lungime maximă. Aflați:
 - a) lungimea unei muchii a cubului, dacă raza sferei este de 15 cm;
 - b) raza sferei, dacă lungimea unei muchii a cubului este 18 cm.
9. Într-o cutie sferică se introduce o prismă dreaptă cu muchiile laterale de lungime maximă. Aflați:
 - a) lungimea unei muchii laterale a prisme, dacă raza sferei este de 24 cm și o muchie a bazei are 4 cm;
 - b) raza sferei, dacă lungimea unei muchii laterale a prisme este de 9 cm și o muchie a bazei are 7 cm.
10. Într-o cutie sferică se introduce o piramidă patrulateră regulată cu muchiile laterale de lungime maximă. Aflați:
 - a) lungimea unei muchii laterale a piramidei, dacă raza sferei este de 17 cm raza bazei conului de 15 cm;
 - b) raza sferei, dacă înălțimea conului (h) este 49 cm și raza bazei conului 21 cm.
11. Într-o cutie de forma unui con circular drept se introduce o piramidă triunghiulară regulată cu muchiile laterale de lungime maximă și triunghiul bazei înscris în cercul bazei conului. Aflați:
 - a) lungimea unei muchii laterale a piramidei, dacă raza bazei conului este de 12 cm și înălțimea conului – 17 cm;
 - b) raza bazei conului dacă înălțimea piramidei este de 21 cm și generatoarei conului de 29 cm.
12. Într-o piramida regulată $VABCD$ se introduce o sferă de rază maximă. Aflați:
 - a) raza sferei, dacă $AB = 12 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 8 \text{ cm}$, O este intersecția diagonalelor;
 - b) raza sferei, dacă $AB = 42 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 20 \text{ cm}$.
13. Într-o piramida regulată $VABC$ se introduce o sferă de rază maximă. Aflați:
 - a) raza sferei, dacă $a_b = 7 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 24 \text{ cm}$, O este intersecția medianelor triunghiului ABC .
 - b) raza sferei, dacă $a_b = 11 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 60 \text{ cm}$.
 - c) cosinusul unghiului format planul VAB cu planul bazei dacă $a_b = 7 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 24 \text{ cm}$.
14. Într-o piramida regulată $VABCDEF$ se introduce o sferă de rază maximă. Aflați:
 - a) raza sferei, dacă $a_b = 9 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 40 \text{ cm}$, O este centrul hexagonului bazei piramidei;
 - b) raza sferei, dacă $a_b = 12 \text{ cm}$ și înălțimea $VO = 35 \text{ cm}$.

Pentru concursuri

■ Exerciții

1. Arătați că $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Rezolvare. Se aplică propoziția: $(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$.

Rezultă: $2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$, $3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$, $4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$, ..., $[(n-1)+1]^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$, $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. După adunare rezultă:

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 1 + 4 \sum_{i=1}^n i^3 + 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i + n \Leftrightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - \\ (n+1) &\Leftrightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] \Leftrightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1)[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)] \\ &\Leftrightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1) \Leftrightarrow 4 \sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

2. Fie $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Arătați că este adevărată propoziția: $\sum_{i=1}^n f(i) = \frac{n(n+3)(n^2+3n-2)}{4}$.

Rezolvare. $\sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{i=1}^n i^3 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2n = \frac{n(n^3 + 6n^2 + 7n - 6)}{4}$. Deoarece $x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$ are soluția întreagă -3 , $x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = (x+3)(x^2 + 3x - 2)$. Rezultă $\frac{n(n^3 + 6n^2 + 7n - 6)}{4} = \frac{n(n+3)(n^2 + 3n - 2)}{4}$. Propoziția este adevărată

3. Pentru a și b numere reale pozitive demonstrați (inegalitatea mediilor): $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. (Media armonică $\leq$ media geometrică $\leq$ media aritmetică $\leq$ media pătratică.)

Rezolvare. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$, (1). $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$, (2). $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2$, (3). (1), (2) și (3) implică: inegalitatea mediilor este adevărată.

4. Demonstrați că pentru orice număr real x este adevărată propoziția: $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Rezolvare. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$, adevărată pentru orice număr real x .

5. Aflați soluțiile reale ale sistemului:
$$\begin{cases} 2x = y + \frac{2}{y} \\ 2y = x + \frac{2}{x} \end{cases}$$

Rezolvare. Fie x și y numere reale pozitive. Atunci:

$$2x = y + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, (1). 2y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow y \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, (2). 2(x+y) = x + y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \geq 4\sqrt{2}, (3). (1), (2), (3) \text{ implică: } 2\sqrt{2} \leq x+y = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow x=y=\sqrt{2}.$$

Se constată că: dacă (a, b) este soluție a sistemului, atunci și $(-a, -b)$ este soluție. Mulțimea soluțiilor sistemului $S = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

Răspunsuri. Rezolvări

Modulul 1. Recapitulare și completări

1. Mulțimea numerelor reale

3. a) $-12, (241) = -12 \frac{241}{999}$. 5. a) $-15,5(98) = -15 \frac{593}{990}$. 8. a) $-10,2003000400000\dots$ b) $-1,49162536\dots$ c) $79,010010001\dots$; $21,024681012\dots$ d) $-82,248163264\dots$ 9. Procedați ca în teorema demonstrată. 10. Numărul termenilor care nu pot fi scriși este infinit. 10. Numărul termenilor care nu pot fi scriși este infinit. 12. a) $15,7 = 15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$. b) $8 \frac{3}{16} = 8 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}$. 13. a) $x = y = 2, z = 7$. b) $x = 2, y = 8, z = 4$.

14. Pentru numerele $m = 100a + 2\sqrt{ab} + b = (10\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Rezultă $m \in \{121, 144, 169, 441, 484, 961\}$.

2. Reprezentarea numerelor reale. Modulul unui număr real

5. a) $|2x + 12| = 9 \Leftrightarrow 2x + 12 = 9$ sau $2x + 12 = -9 \Leftrightarrow 2x = -21$ sau $2x = -31 \Leftrightarrow x = -11,5$ sau $2x = -15,5 \Rightarrow S = \{-11,5; -15,5\}$. 6. V. ex. rezolvat 2. 7. V. ex. rezolvat 7. 12. a) $|3x + 11| \geq 0$ și $|8y - 15| \geq 0$ și $|18z - 15| \geq 0$ și $|25t - 27| \geq 0 \Leftrightarrow 3x + 11 = 0$ și $8y - 15 = 0$ și $18z - 15 = 0$ și $25t - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (6) și $y = 0,875$ și $z = 0,8(3)$ și $t = 1, (8)$. 13. a) $\sqrt{9x^2 - 30x + 25} + \sqrt{25y^2 + 70y + 49} + \sqrt{81z^2 + 72z + 16} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(3x - 5)^2} + \sqrt{(5y + 7)^2} + \sqrt{(9z + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow |3x - 5| + |5y + 7| + |9z + 4| = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0$ și $5y + 7 = 0$ și $9z + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1, (6)$ și $y = -2,4$ și $z = -0, (9)$. 14. a) $\sqrt{36x^2 - 12x + 5} = \sqrt{(6x - 1)^2 + 4} \geq 2$; $\sqrt{121y^2 + 66y + 34} = \sqrt{(11y + 3)^2 + 25} \geq 5$; $\sqrt{9z^2 + 24z + 80} = \sqrt{(3z + 4)^2 + 64} \geq 8$. Rezultă $\sqrt{36x^2 - 12x + 5} + \sqrt{121y^2 + 66y + 34} + \sqrt{9z^2 + 24z + 80} = 15 \Leftrightarrow 6x - 1 = 0$ și $11y + 3 = 0$ și $3z + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0,1(6)$ și $y = -\frac{3}{11}$ și $z = -1, (3)$. 15. a) $\sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{31}, \sqrt{33}, \sqrt{35}, \sqrt{37}$.

3. Operații cu numere reale

11. a) $19,5(3,7 + 6,3) = 19,5 \cdot 10 = 195$. 13. a) $9,45 \cdot 3,34 + 9,45 \cdot 5,38 + 9,45 \cdot 1,28 = 9,45(3,34 + 5,38 + 1,28) = 9,45 \cdot 1 = 9,45$. 14. a) $65,3 \cdot 2,37 + 65,3 \cdot 1,18 - 65,3 \cdot 1,55 = 65,3(2,37 + 1,18 - 1,55) = 65,3 \cdot 2 = 130,6$. 15. a) $36 : 1,7 + 43 : 1,7 + 23 : 1,7 = (36 + 43 + 23) : 1,7 = 102 : 1,7 = 60$. 16. a) $(3 \ 824 + 5 \ 715 - 2 \ 239) : 7,3 = 7 \ 300 : 7,3 = 1 \ 000$. 17. a) $1,28(1,75 + 1,59) + 2,05(1,75 + 1,59) = (1,75 + 1,59)(1,28 + 2,05) = 3,34 \cdot 3,33 = 11,1222$. 18. a) $23,7(8,95 - 2,28) + 42,9(8,95 - 2,28) = (8,95 - 2,28)(23,7 + 42,9) = 6,67 \cdot 66,6 = 444,222$. 19. a) $58,7 \cdot 7,63 - 58,7 \cdot 4,27 - 25,4 \cdot 7,63 + 25,4 \cdot 4,27 = 58,7(7,63 - 4,27) - 25,4(7,63 - 4,27) = (7,63 - 4,27)(58,7 - 25,4) = 3,35 \cdot 33,3 = 111,555$. 20. a) $79,2 \cdot 10,22 - 79,2 \cdot 6,85 - 45,9 \cdot 10,22 + 45,9 \cdot 6,85 = 79,2(10,22 - 6,85) - 45,9(10,22 - 6,85) = (10,22 - 6,85)(79,2 - 45,9) = 3,37 \cdot 33,3 = 112,221$. 21. a) $12,3(1,15 + 1,26 + 0,98) + 20,8(1,15 + 1,26 + 0,98) = (12,3 + 20,8)(1,15 + 1,26 + 0,98) = 33,1 \cdot 3,39 = 112,209$. 22. a) $15,5(1,49 + 5,73 - 3,86) + 17,9(1,49 + 5,73 - 3,86) = (15,5 + 17,9)(1,49 + 5,73 - 3,86) = 33,4 \cdot 3,36 = 112,264$.

Suplimentar

1. a) $0,(\overline{bc}) = x$; $100x = x + \overline{bc}$, de unde $x = \frac{\overline{bc}}{99}$. $a,(\overline{bc}) = a + \frac{\overline{bc}}{99}$. b) $a,(\overline{b_1b_2...b_n}) = a + \frac{\overline{b_1b_2...b_n}}{99...9}$, de n ori

cifra 9. 2. a) Fie $0,(\overline{bc(def)}) = x$. Atunci, $100x = \overline{bc} + 0,(\overline{def})$. Rezultă: $\overline{bc} + 0,(\overline{def}) = \frac{\overline{bc000} - \overline{bc} + \overline{def}}{99\ 900}$
 $= \frac{\overline{bcdef} - \overline{bc}}{999}$; $x = \frac{\overline{bcdef} - \overline{bc}}{99\ 900}$; $a,(\overline{bc(def)}) = a + \frac{\overline{bcdef} - \overline{bc}}{99\ 900}$. b) $a,(\overline{b_1b_2...b_n(c_1c_2...c_m)}) = a +$

$\frac{\overline{b_1b_2...b_nc_1c_2...c_m} - \overline{b_1b_2...b_n}}{99...90...0}$, unde 0 apare de n ori și 9 apare de m ori. 3. Se ține cont că $\Delta = 4\Delta_1$ și se

înlocuiește în $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a}$ și $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a}$. 4. Suma termenilor șirului este un număr impar. Prin urmare $2n + 1 - 8k$ este număr impar pentru orice k – număr natural nenul. Așadar, nu se poate obține un șir cu toți termenii egali cu 0. 5. 2, 12, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, 411221314, 31221324, 21322314, 21322314. Numărul este periodic. 6. a) $c = 2,01011011101110...$

b) $c = 5,30330333033330...$ 7. Fie $AB = a$, $AM = x$, $MB = a - x$. Atunci $\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$, $(a-x)^2 = ax$.

Ecuția are soluțiile $\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$, $\frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$. Valoarea raportului este $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 8. $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}} = x$

implică $x^2 = x + 1$. Ecuția are soluția pozitivă numărul de aur $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 9. Suma inverselor are numi-

torul $n(n+1)(n+2)$. Rezultă că numărul zecimal are perioadă mixtă. 10. Se constată că 5 este soluție a ecuației. Orice ecuație de gradul I este echivalentă cu o ecuație de forma $ax + b = 0$. Cu ajutorul ei se află zeroul funcției de forma $f(x) = ax + b$ și zeroul acesteia este unic. Deoarece ecuația dată este de gradul I, 5 este unica ei soluție. 11. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implică $ad - bc < 0$. Rezultă $\frac{a}{b} - \frac{a+b}{b+d} < 0$ și $\frac{c}{d} - \frac{a+b}{b+d} > 0$.

12. $19n^4 + 2 = 9n^4 + (n^2 + 1)^2 + (3n^2 - 1)^2 + 4n^4$. 13. $5x - |2x - 3| = 12$ sau $5x - |2x - 3| = -12 \Leftrightarrow |2x - 3| = 5x - 12$ sau $|2x - 3| = 5x + 12 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5x - 12$ sau $2x - 3 = 12 - 5x$ sau $2x - 3 = 5x + 12$ sau $2x - 3 = -5x - 12$. $S = \left\{-\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, 3, 5\right\}$. 14. Fie $a = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{13}{16} \cdot \frac{19}{22} \cdot \dots \cdot \frac{2005}{2008}$. $a < \frac{4}{7} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{22}{25} \cdot \dots \cdot \frac{2008}{2011}$.

Rezultă: $a^2 < \frac{1}{2011}$, de unde $a < \frac{1}{\sqrt{2011}}$. 15. Se cercetează ultima cifră a fiecăruia dintre numerele

$(5x + 4)^{1344}$, $(2y - 9)^{1328}$ și $2 \cdot 578^{7833}$. Ecuția nu are soluții în $\mathbb{Z}$. 16. Se ține cont că $10^{600} < 2^{2009} < 10^{606}$.

17. Exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului $2009!$ este: $\left[\frac{2009}{2}\right] + \left[\frac{2009}{4}\right] + \dots$

$+ \left[\frac{2009}{1024}\right] = 1\ 004 + 1\ 003 + \dots + 1 = 1\ 004(1\ 004 + 1) : 2 = 504\ 510$. 18. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} -$

$\frac{1}{2010} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2010} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1010}\right) = \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}$.

19. $at + (1-t)b = \frac{at + (1-t)b}{t + (1-t)}$ este media ponderată a numerelor a și b . 20. Se constată că $2s - s =$

$100 \cdot 2^{101} \Leftrightarrow s = 100 \cdot 2^{101}$. 21. $25^2 = 13 + 14 + \dots + 37$. 22. a) 10 201. b) 1 004 004. c) 100 060 009.

d) 10 000 900 006. e) 2 000 002 000 005. 23. a) 5 616. b) 1 030 221. c) 100 902 024. 24. Se ține cont

că $10^{600} < 2^{2009} < 10^{606}$. Rezultă: $600 < o(2^{2009}) < 606$; $o(o(2^{2009})) = 3$.

Modulul 2. Rapoarte algebrice

Suplimentar

1. a) $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4+x^4-x^5+x^5-x^6+x^6-x^7+\dots}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} =$

$$\frac{(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + x^4(1-x) + x^5(1-x) + x^6(1-x) + \dots}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} =$$

$$\frac{(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\dots)}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\dots$$

$$\text{b) } \frac{1}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2-x^4+x^4-x^6+x^6-x^8+x^8-x^{10}+x^{10}-x^{12}+x^{12}-x^{14}+\dots}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} =$$

$$\frac{(1-x^2) + x^2(1-x^2) + x^4(1-x^2) + x^6(1-x^2) + \dots}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2}$$

$$= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots \text{ c) } \frac{1}{1+x^3} = \frac{1+x^3-x^3-x^6+x^6-x^9+x^9-x^{12}+x^{12}-x^{15}+x^{15}-x^{18}+x^{18}-x^{21}+\dots}{1+x^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{(1+x^3) - x^3(1+x^3) + x^6(1+x^3) - x^9(1+x^3) + x^{12}(1+x^3) - x^{15}(1+x^3) + x^{18}(1+x^3) - \dots}{1+x^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{(1+x^3)(1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-x^{15}+x^{18}-\dots)}{1+x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} = 1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-x^{15}+x^{18}-\dots$$

$$\text{d) } \frac{1}{1+x^4} = 1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-x^{20}+x^{24}-\dots \text{ 2.a) } \frac{1}{1+x^3} = \frac{(1-x^3)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\dots)}{1-x^3}$$

$$= \frac{(1-x^3) + x^3(1-x^3) + x^6(1-x^3) + x^9(1-x^3) + \dots}{1-x^3} = \frac{1-x^3+x^3-x^6+x^6-x^9+x^9-x^{12}+x^{12}-\dots}{1-x^3} =$$

$$\frac{1}{1-x^3}. \text{ b) } 1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+\dots = \frac{1}{1-x^4}. \text{ c) } 1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+\dots = \frac{1}{1-x^5}.$$

3. a) $(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4 = 1-x^4$. **b)** $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4) = 1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4+x^4-x^5 = 1-x^5$. **c)** $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots) = 1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4+x^4-x^5+x^5-\dots = 1$.

4. a) $1+x(1-x+x^2-x^3) = 1+x-x-x^2+x^2+x^3-x^3-x^4 = 1-x^4$. **b)** $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4) = 1+x-x-x^2+x^2+x^3-x^3-x^4+x^4+x^5 = 1+x^5$. **c)** $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots) = 1+x-x-x^2+x^2+x^3-x^3-x^4+x^4+x^5-\dots = 1$.

5. $8-2\sqrt{7} = (\sqrt{7}-1)^2$; $12+3\sqrt{7} = 12+3\sqrt{7}+\sqrt{7}-1 = 11+4\sqrt{7} = (\sqrt{7}+2)^2$; $\sqrt{7}+2-1-\sqrt{7} = 1$.
 $(\sqrt{12+3\sqrt{7}} + \sqrt{8-2\sqrt{7}} - 1 - \sqrt{7})^{2024} = 1$.

6. $\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{26-2\sqrt{21}}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{26-2\sqrt{21}}}} = \sqrt{9-3+\sqrt{26-2\sqrt{21}}}$; $\sqrt{6+\sqrt{26-2\sqrt{21}}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{26-2\sqrt{21}}} = \sqrt{36-26-2\sqrt{21}} = \sqrt{10+2\sqrt{21}}$; $\sqrt{10+2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{16} = 4$.

7. a) Varianta 1. Se aduce la forma cea mai simplă suma rapoartelor din membrul stâng. În final forma cea mai simplă este raportul din membrul drept. Varianta 2. Fie $a = b$. Atunci propoziția devine: $0 + \frac{a-c}{1+ac} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{0 \cdot (b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)} \Leftrightarrow 0 = 0$, (1). Același rezultat se obține pentru $a = c$ și $b = c$, (2). Pentru $a = 3$, $b = 2$ și $c = 1$, propoziția devine: $-\frac{1}{42} = -\frac{1}{42}$, (3). (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ propoziția este adevărată. **b)** Pentru $a = 0$ rezultă: $0 \cdot \frac{b-c}{0+1} + b \cdot \frac{c-0}{0+1} + c \cdot \frac{0-b}{0+1} = \frac{0 \cdot (0-b)(b-c)(c-0)}{(0+1)(0+1)(0+1)} \Leftrightarrow 0 = 0$, (1). Analog se deduce că pentru $b = 0$ și $c = 0$ rezultă $0 = 0$, (2). Pentru $a = b$ rezultă: $b \cdot \frac{b-c}{b^3c+1} + b \cdot \frac{c-b}{b^3c+1} + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Analog se deduce că pentru $b = c$ și $a = c$ rezultă $0 = 0$, (3). Pentru $a = 2$, $b = 1$ și $c = 0$, propoziția devine: $2 \cdot \frac{1-0}{0+1} + 1 \cdot \frac{0-2}{0+1} + 0 \cdot \frac{2-1}{0+1} = 0$. Rezultă $0 = 0$, (4). (1), (2), (3) și

(4) $\Rightarrow$ propoziția este adevărată. c) Fie $a = b$. Atunci propoziția devine: $\frac{0}{1+2b+2b^2} + \frac{b-c}{1+2b+2bc} + \frac{c-b}{1+2b+2bc} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, (1). Același rezultat se obține pentru $a = c$ și $b = c$, (2). Pentru $a = 2$, $b = 1$ și $c = 0$, propoziția devine: $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{24}$, (3). (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ propoziția este adevărată.

8. a) $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$; $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{an+a+bn}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(a+b)+a}{n(n+1)}$,

(1). (1) $\Rightarrow 1 = an + a + bn \Leftrightarrow n(a+b) + a = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$ (2). (2) $\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. b) $\frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$; $\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)(n+3)} =$

$\frac{an+3a+bn+b}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{n(a+b)+3a+b}{n(n+1)}$, (1). (1) $\Rightarrow 1 = n(a+b) + 3a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ a=0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,5 \\ b=-0,5 \end{cases}$ (2). (2) $\Rightarrow \frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{0,5}{n+1} - \frac{0,5}{n+3}$.

9. a) $\sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}$. b) $\sum_{n=1}^{2023} \frac{1}{n^2+4n+3} = \sum_{n=1}^{2023} \frac{0,5}{n+1} - \sum_{n=1}^{2023} \frac{0,5}{n+3} = 0,5 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2024} - \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right)$.

10. a) $1 + 2 \cdot 006^{-1} = 1 + \frac{1}{2006} = \frac{2007}{2006} \Rightarrow \frac{1}{1+2 \cdot 006^{-1}} = 1 : \frac{2007}{2006} = \frac{2006}{2007}$, (1). (1) $\Rightarrow \frac{1}{1+2 \cdot 006^{-1}} +$

$\frac{1}{2007} = 1$, (2). Analog se deduce că: $\frac{1}{1+2 \cdot 005^{-1}} + \frac{1}{2006} = 1$; $\frac{1}{1+2 \cdot 004^{-1}} + \frac{1}{2005} = 1$; ..., $\frac{1}{1+2^{-1}} + \frac{1}{3} = 1$, (3). $2 \cdot 006 - 2 + 1 = 2 \cdot 005$ și $2 \cdot 007 - 2 + 1 = 2 \cdot 005$, (4). (2), (3) și (4) $\Rightarrow e = 2 \cdot 005$. **Răspuns:** 2 022.

11. a) Fie $a = u^2$, $b = v^2$, (1). Se simplifică raportul: $\frac{u^4+u^2v-uv-u^2}{u^2+u+v}$. $u^4+u^2v-uv-u^2 = u^2(u^2-1) + uv(u-1) = u^2(u+1)(u-1) + uv(u-1) = u(u-1)(u^2+u+v) = u^2-u$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow r = a - \sqrt{a}$.

b) Fie $c = u^2$, $d = v^2$, (1). Se simplifică raportul: $\frac{au^2-av^2+bu^2v-buv^2}{au+bu+av}$. $au^2-av^2+bu^2v-buv^2 = a(u^2-v^2) + buv(u-v) = a(u+v)(u-v) + buv(u-v) = (u-v)(au+bu+av)$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow r = \sqrt{c} - \sqrt{d}$.

12. a) Fie $x = u^2$, (1). Se simplifică raportul: $\frac{a^2+2a+2au+u^2+2u}{a^2-a+au-u}$. $a^2+2a+2au+u^2+2u = (a+u)^2+2(a+u) = (a+u)(a+u+2)$; $a^2-a+au-u = a(a+u)-(a+u) = (a+u)(a-1)$, (2). (1) și (2)

$\Rightarrow \frac{(a+u)(a+u+2)}{(a+u)(a-1)} = \frac{a+u+2}{a-1} \Rightarrow r = \frac{a+\sqrt{x}+2}{a-1}$. b) $x^3-3x-2 = x^3-4x+x-2 = x(x+2)(x-2) + (x-2) = (x-2)(x^2+2x+1) = (x-2)(x+1)^2$, (1). $x^3-3x+2 = x^3-4x+x+2 = x(x+2)(x-2) + (x+2) = (x+2)(x^2-2x+1) = (x+2)(x-1)^2$, (2). (1) $\Rightarrow (x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3-3x-2 = (x+1)(x-1)\sqrt{x-2}$

$\sqrt{x+2} + (x-2)(x+1) = (x+1)\sqrt{x-2}[(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}]$, (3). Analog (2) $\Rightarrow (x^2-1)\sqrt{x^2-4} + x^3-3x+2 = (x-1)\sqrt{x+2}[(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}]$, (4). (3) și (4) $\Rightarrow r = \frac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$.

13. a) Varianta 1. Se dezvoltă prin înmulțire. Varianta 2. Se verifică alegând valori pentru variabile. Fie tripletul (0, 0, 0). Prin înlocuire se obține propoziția adevărată: $0 = 0$. Fie tripletul (1, 0, 0). Prin înlocuire se obține propoziția adevărată: $1 = 1$. Aceeași propoziție se obține pentru (0, 1, 0), și (0, 0, 1). Pentru (1, 1, 1) se obține: $9 = 3 + 6$. adevărat. b) Pentru (0, 0, 0) se obține propoziția adevărată: $0 = 0$. Pentru (1, 0, 0) se obține propoziția adevărată: $1 = 1 + 0 - 0$. Pentru (1, 1, 1) se obține propoziția

adevărată: $27 = 3 + 27 - 3$. c) Pentru $(0, 0, 0)$ se obține propoziția adevărată: $0 = 0$. Pentru $(1, 0, 0)$ se obține propoziția adevărată: $1 = 1 + 0 - 0$. Pentru $(1, 1, 1)$ se obține propoziția adevărată: $27 = 3 + 24$.

Modulul 3. Funcții

Suplimentar

5. a) $f(-1) = 2 \Rightarrow 1 - p + q = 2 \Leftrightarrow -p + q = 1$, (1). Pentru $y = ax^2 + bx + c$, abscisa vârfului $x_v = -\frac{b}{2a}$, (2). (2) $\Rightarrow -\frac{p}{2} = -1 \Leftrightarrow p = 2$, (3). (1) și (2) $\Rightarrow q = 3$. b) **Răspuns:** $p = 4$; $q = 5$.

6. a) $f(-2) = 1 \Rightarrow 4 - 2p + q = 1 \Leftrightarrow -2p + q = -3$, (1). $f(-3) = 0 \Rightarrow 9 - 3p + q = 0 \Leftrightarrow -3p + q = -9$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow \begin{cases} -2p + q = -3 \\ -3p + q = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ -2p + q = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6 \\ q = 9 \end{cases}$. b) **Răspuns:** $p = -6$; $q = -4$.

7. a) f are un singur punct cu axa absciselor, dacă $\Delta = 0$. Rezultă: $9 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow (3 - 2m)(3 + 2m) = 0 \Rightarrow m = 1,5$ sau $m = -1,5$. b) **Răspuns:** $m = -1,25$; $m = 1,25$.

8. a) f are un singur punct cu axa absciselor, dacă $\Delta \geq 0$. Rezultă: $4m^2 - 4(m - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m^2 + 8m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0,5$. $m \in [0,5; \infty)$. b) **Răspuns:** $m \in [0,1(3); \infty)$.

9. a) $f(1) = 3 \Rightarrow 1 - 2m^2 + m + 3 = 3 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 = 0$, (1). Pentru $y = ax^2 + bx + c$, abscisa vârfului $x_v = -\frac{b}{2a}$, (2). (2) $\Rightarrow \frac{2m^2}{2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = 1$, (3). Propozițiile (1) și (3) sunt adevărate simultan dacă $m = 1$.

b) **Răspuns:** $m = 1$.

10. a) $f(1) = 0 \Rightarrow m - m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 = 0$, (1). (1) $\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ sau $m = -1$, (2). Parabola $y = ax^2 + bx + c$ are ramurile orientate în sus dacă $a > 0$, (3). (2) și (3) $\Rightarrow m = 1$. **Răspuns:** $m = -\sqrt{2}$.

11. a) Pentru $y = ax^2 + bx + c$, ordonata vârfului parabolei (valoarea minimă sau maximă) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, (1). $\Delta = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4 = 4m - 3$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow -(4m - 3) : 4 = 1 : 4 \Leftrightarrow 4m - 3 = -1 \Leftrightarrow m = 0,5$. b) **Răspuns:** $m = 0$.

12. a) Funcția de gradul I de forma $f(x) = ax + b$ este strict crescătoare, dacă $a > 0$, (1). $f(1) = 0 \Rightarrow m - m^2 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$ sau $m = \sqrt{3}$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow m = \sqrt{3}$. b) **Răspuns:** $m = 2$.

13. a) Parabola $y = ax^2 + bx + c$ are ramurile orientate în sus dacă $a > 0$ și intersectează abscisa în două puncte, dacă $\Delta > 0$, (1). $\Delta = 25 + 12m$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow 25 + 12m > 0$ și $m > 0 \Leftrightarrow m > -2,5$ și $m > 0 \Rightarrow m \in (0, \infty)$. b) **Răspuns:** $m \in (-\infty, 0)$.

14. a) $f(1) = 4$ și $f(0) < 0$, (1). $m^2 - 2 + m = 4 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ sau $m = 1$, (2). $f(0) = m$, (3). (1), (2) și (3) $\Rightarrow m = -2$. b) **Răspuns:** $m = 1$.

15. a) $f(m) = 2$ și $m > 0$, (1). $m^2 - 4m + 2 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 4$ sau $m = 0$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow m = 4$. b) **Răspuns:** $m = -1$.

Modulul 4. Ecuații. Inecuații. Sisteme

Suplimentar

1. a) Fie $y = x^2$, (1). Rezultă ecuația $y^2 - 7y - 8 = 0$, (2). Ecuația (2) are soluțiile -1 și 8 , (3). (1) și (3) implică: $x^2 = 8$, (4). $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, (5). (1), (4) și (5) implică: mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $S = \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$. b) **Răspuns:** $S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$. c) **Răspuns:** $S = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$. d) **Răspuns:** $S = \{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$. e) **Răspuns:** $S = \{-3, 3\}$. f) **Răspuns:** $S = \{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$. g) **Răspuns:** $S = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$.

2. a) Fie $y = x^2$, (1). Rezultă ecuația $y^2 + 9y + 20 = 0$, (2). Ecuația (2) are soluțiile -4 și -5 , (3). (1) și (3) implică: mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este: $S = \emptyset$. b) **Răspuns:** $S = \emptyset$. c) **Răspuns:** $S = \emptyset$.

3. a) Fie $S = x_1 + x_2 = -7$ și $P = x_1 x_2 = -3$, (1). $S^{(2)} = S^2 - 2P$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow S^{(2)} = 49 + 6 = 55$. $S^{(3)} = S^3 - 3SP$, (3). (1) și (3) $\Rightarrow S^{(3)} = -343 - 63 = -406$. $S^{(-1)} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$, (4). (1) și (4) $\Rightarrow S^{(-1)} = \frac{7}{3} = 2,6$. $S^{(-2)} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{S^{(2)}}{P^2}$, (5). (1) și (5) $\Rightarrow S^{(-2)} = \frac{55}{9} = 6,1$.

4. a) Fie ecuația $x^2 - Sx + P = 0$ cu x_1 și x_2 . Se știe că $x_1 + x_2 = S$, $x_1 x_2 = P$. Atunci: $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$ și $x_2^2 - Sx_2 + P = 0$, (1). După adunare, (1) $\Rightarrow S^{(2)} = S^2 - 2P$, (2). (1) $\Rightarrow x_1^3 - Sx_1^2 + Px_1 = 0$ și $x_2^3 - Sx_2^2 + Px_2 = 0$, (3). După adunare, (3) $\Rightarrow S^{(3)} - S(S^2 - 2P) + P \cdot S = 0 \Leftrightarrow S^{(3)} = S^3 - 3SP$, (4). (3) $\Rightarrow x_1^4 - Sx_1^3 + Px_1^2 = 0$ și $x_2^4 - Sx_2^3 + Px_2^2 = 0$, (5). După adunare, (5) $\Rightarrow S^{(4)} - S \cdot S^{(3)} + P \cdot S^{(2)} = 0$, (6). Ecuația are: $S = 7$; $P = -2$; $S^{(2)} = S^2 - 2P = 49 + 4 = 53$; $S^{(3)} = 343 + 42 = 385$; $S^{(4)} - 7 \cdot 385 - 2 \cdot 53 = 0 \Leftrightarrow S^{(4)} = 2\,695 + 106 \Leftrightarrow S^{(3)} = 2\,801$.

5. a) DVA este $\mathbb{R}^*$. Fie $y = \frac{x+2}{x}$, (1). (1) $\Rightarrow y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$, (1). Soluțiile ecuației (1) sunt

$$-1 \text{ și } 3, (2). (1) \text{ și } (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x} = -1 \\ \frac{x+2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = -x \\ x+2 = 3x \end{cases} \Rightarrow S = \{-3, 1\}. \text{ b) DVA este } \mathbb{R}^*. \text{ Fie } y = \frac{x+3}{x}, (1).$$

$$(1) \Rightarrow y^2 - 5y = -4 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0, (1). \text{ Soluțiile ecuației (1) sunt } 1 \text{ și } 4, (2). (1) \text{ și } (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x} = 1 \\ \frac{x+3}{x} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = x \\ x+3 = 4x \end{cases} \Rightarrow S = \{1\}.$$

6. a) $\begin{cases} x+3(x+2(y-2)) = -8 \\ 3x-2(4y+5(x-3)) = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3(x+2y-4) = -8 \\ 3x-2(4y+5x-15) = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+9x+6y-12 = -8 \\ 3x-8y-10x+30 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 10x+6y = 4 \\ -7x-8y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(10x+6y) = 16 \\ 3(-7x-8y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x+24y = 16 \\ -21x-24y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 19 \\ 7x+8y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, -1)\}.$$

7. a) Fie $u = \frac{1}{x+y}$ și $v = \frac{1}{x-y}$, (1). (1) $\Rightarrow \begin{cases} 3u-5v = 4 \\ 7u+4v = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(3u-5v) = 16 \\ 5(7u+4v) = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u-20v = 16 \\ 35u+20v = 125 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 47u = 141 \\ 3u-5v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ 3u-5v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ 9-5v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}, (2). (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 3 \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0, (3) \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 1, (3) \\ 2y = -0, (6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, (6) \\ y = -0, (3) \end{cases} \Rightarrow S = \{(0, 6); -0, (3)\}.$$

b) Fie $u = \frac{1}{x+y-9}$ și $v = \frac{1}{x-y+4}$, (1). (1) $\Rightarrow \begin{cases} 3u-2v = -5 \\ 5u-8v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(3u-2v) = -20 \\ 5u-8v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u-8v = -20 \\ 5u-8v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 7u = -21 \\ 3u-2v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ 3u-2v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ -9-2v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ v = -2 \end{cases}, (2). (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y-9} = -3 \\ \frac{1}{x-y+4} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-9 = -0, (3) \\ x-y+4 = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 8, (6) \\ x-y = -4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{etc.}$$

8. a) Fie $u = |x|$ și $v = |y|$, $u \geq 0$ și $v \geq 0$, (1). (1) $\Rightarrow \begin{cases} u+v = 5 \\ u-v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = 6 \\ 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}, (2). (2) \Rightarrow \begin{cases} |x| = 3 \\ |y| = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 3 \\ u = -3 \\ v = 2 \\ v = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-3, -2), (-3, 2), (3, -2), (3, 2)\}. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 3x+|2y-5| = 7 \\ -x+|6y-15| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+|2y-5| = 7 \\ -x+3|2y-5| = 1 \end{cases}, (1). \text{ Fie } u = |2y-5|, u \geq 0, (2). (1) \text{ și } (2) \Rightarrow \begin{cases} 3x+u = 7 \\ -x+3u = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+u = 7 \\ -3x+9u = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10u = 10 \\ -x+3u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ x = 2 \end{cases}, (2). (2) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ |2y-5| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ 2y-5 = -1 \\ x = 2 \\ 2y-5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = \{(2, 2), (2, 3)\}.$$

$$c) \begin{cases} |x-11| - |2y+10| = -2 \\ |3x-33| + |7y+35| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-11| - 2|y+5| = -2 \\ 3|x-11| + 7|y+5| = 7 \end{cases} \quad (1). \text{ Fie } u = |x-11|, u \geq 0, v = |y+5|,$$

$$v \geq 0, (2). (1) \text{ și } (2) \Rightarrow \begin{cases} u-2v=-2 \\ 3u+7v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-6v=-6 \\ 3u+7v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-11|=0 \\ |y+5|=1 \end{cases} \quad (2). (2) \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y+5=-1 \\ x=11 \\ y+5=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-6 \\ x=11 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow S = \{(11, -6), (11, -4)\}.$$

9. Se ține cont că: $|\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7}$; $|\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1$; $|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$; $|\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$, (1).

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{7})x + (\sqrt{5}-1)y = x(1-\sqrt{7}) + \sqrt{5}y \\ (2-\sqrt{3})x - (3-\sqrt{5})y = -\sqrt{3}x + \sqrt{5}y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{7}-1+\sqrt{7})x + (\sqrt{5}-1-\sqrt{5})y = 0 \\ (2-\sqrt{3}+\sqrt{3})x - (3-\sqrt{5}+\sqrt{5})y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x+y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}, (2). (2) \Rightarrow S = \{(-1, -2)\}.$$

10. a) $D = S$, unde este mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații: $\begin{cases} x^4 - 7x^2 + 10 \geq 0 \\ x^4 - 17x^2 + 70 > 0 \end{cases}$, (1). Inecuațiile se rezolvă, aplicând metoda intervalelor. Ecuația $y^2 - 7y + 10 = 0$ are soluțiile: 2 și 5, (2). (2) $\Rightarrow$ funcția de forma $g(x) = x^4 - 7x^2 + 10 = (x^2 - 2)(x^2 - 5)$ are zerourile: $-\sqrt{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$. Tabelul semnelui este:

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

(3). (2) și (3) $\Rightarrow$ prima inecuație are mulțimea soluțiilor $S_1 =$

$(-\infty; -\sqrt{5}] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{5}; \infty)$, (4). Analog se obține mulțimea soluțiilor inecuației a doua $S_2 =$

$(-\infty; -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \cup (\sqrt{11}; \infty)$, (5). (1), (4) și (5) $\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -\sqrt{11}) \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup$

$(\sqrt{11}; \infty)$. 11. Răspuns: pentru două numere.

Geometrie

Modulul 6. Recapitulare și completări. Cercul Suplimentar

1. (Teorema punctului interior) Fie coarda CD care conține punctul M . T.Ungh.

Îns. implică $\angle DAB \equiv \angle DCB$, (1). $\angle AMD \equiv \angle BMC$ (ungh. op. vârf), (2). Conform

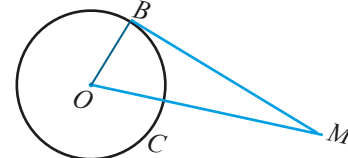
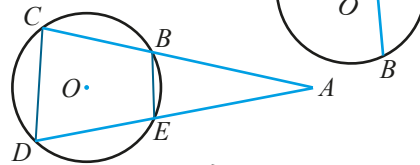
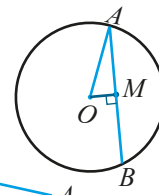
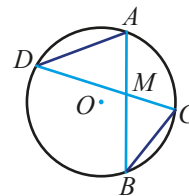
UU, (1) și (2) $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB$, (3), (3) $\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$, (4). (4) $\Rightarrow AM \cdot MB = CM \cdot MD$

pentru orice coardă AB .

2. Fie coarda AB perpendiculară pe OM , (1). Teorema puterii punctului M implică $p = OM^2$, (2). Conform T.Pitagora, (1) și (2) $\Rightarrow p = r^2 - OM^2$.

3. Fie o secantă care conține punctul A și intersectează cercul în punctele E și D . $\angle ABE \equiv \angle ADC$ (unghiuri cu același suplement), (1). Conform UU, (1) $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADC$, (2), (2) $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, (3). (3) $\Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow AB \cdot AC = \text{constant}$.

4. Fie AB o tangentă din A la cercul de rază r și centru O , (1). Teorema puterii punctului A implică $p = AB^2$, (2). Conform T.Pitagora, (1) și (2) $\Rightarrow p = OM^2 - r^2$.



5. Dreapta OI intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în F și G , iar $[LD]$ este diametru. $\angle NAI \equiv \angle BLD$, (unghiuri înscrise de aceeași măsură),

$A - I - D$, (1). Triunghiurile ANI și LBD (înscris într-un semicerc) sunt dreptunghice, (2). Conform UU, (1) și (2) $\Rightarrow \triangle ANI \sim \triangle LBD$, (3), (3) $\Rightarrow \frac{AI}{DL} = \frac{NI}{BD}$
 $\Rightarrow \frac{AI}{2R} = \frac{r}{BD} \Rightarrow AI \cdot BD = 2Rr$, (4). Fie $m(\angle BAC) = 2x^\circ$ și $m(\angle ABC) = 2y^\circ$, (5).
 (5) $\Rightarrow m(\angle BID) = x^\circ + y^\circ$ și $m(\angle IBD) = x^\circ + y^\circ$, (6). (6) $\Rightarrow BD = ID$ (BID triunghi isoscel), (7). (4) și (7) $\Rightarrow AI \cdot ID = 2Rr$, (8). Puterea punctului I este:
 $AI \cdot ID = FI \cdot IG = R^2 - OI^2$, (9). (8) și (9) $\Rightarrow 2Rr = R^2 - OI^2 \Rightarrow OI^2 = R^2 - 2Rr$.

6. Se aplică teorema unghiului format de o tangentă cu o coardă, (1). Fie $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, (2). Conform (1), UU $\Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DBA$, (3). (2) și (3) $\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} =$
 $\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DA}{DB} \cdot \frac{DC}{DA} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$, (4). Analog se deduce că $\triangle FBC \sim \triangle FAB$, (5).

(5) $\Rightarrow \frac{FA}{FC} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, (6). La fel se deduce că $\frac{EB}{EA} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$, (7). (4), (6) și (7) $\Rightarrow \frac{FA}{FC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{EB}{EA} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$, (8). Conform reciprocei teoremei lui Menelaus, (8). (8) $\Rightarrow$ punctele D, E, F sunt coliniare.

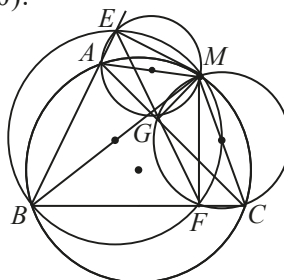
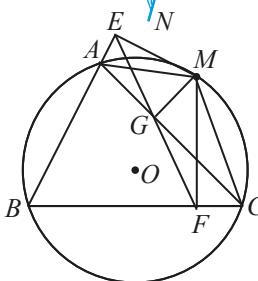
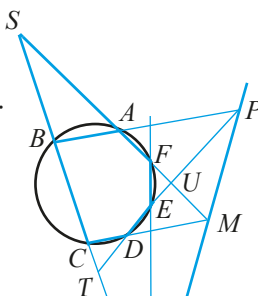
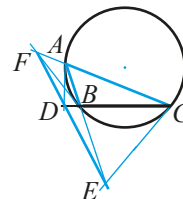
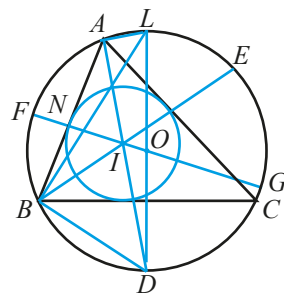
7. Fie $AF \cap BC = \{S\}$, $AF \cap DE = \{U\}$ și $BC \cap DE = \{T\}$, (1). Se aplică teorema lui Menelaus (directă), (2). Se aplică teorema lui Menelaus (reciproca), (3).

Fie triunghiul STU cu transversala $B - A - P$, (4). Conform (2), (4) $\Rightarrow \frac{PT}{PU} \cdot \frac{UA}{SA} \cdot \frac{SB}{TB} = 1$, (5). Fie triunghiul STU cu transversala $M - D - C$, (6). Conform (2),
 (6) $\Rightarrow \frac{MU}{MS} \cdot \frac{SC}{TC} \cdot \frac{TD}{DU} = 1$, (7). Fie triunghiul STU cu transversala $N - E - F$, (8).

Conform (2), (8) $\Rightarrow \frac{NS}{NT} \cdot \frac{TE}{EU} \cdot \frac{UF}{SF} = 1$, (9). Se aplică teorema punctului exterior, (10). (10) $\Rightarrow SA \cdot SF = SB \cdot SC$; $TC \cdot TB = TD \cdot TE$; $UE \cdot UD = UF \cdot UA$; (11). (5),
 (7), (9) $\Rightarrow \frac{PT}{PU} \cdot \frac{UA}{SA} \cdot \frac{SB}{TB} \cdot \frac{MU}{MS} \cdot \frac{SC}{TC} \cdot \frac{TD}{DU} \cdot \frac{NS}{NT} \cdot \frac{TE}{EU} \cdot \frac{UF}{SF} = 1$, (12). (11) și (12) $\Rightarrow$
 $\frac{PT}{PU} \cdot \frac{MU}{MS} \cdot \frac{NS}{NT} = 1$, (13). Conform (3), (13) $\Rightarrow$ punctele M, N, P sunt coliniare.

8. Se aplică: proprietățile patrulaterului înscrisibil, (1); teorema unghiului înscris, (2). Fie: $m(\angle AGE) = x^\circ$, (3); $m(\angle CGF) = y^\circ$, (4). Patrulaterul $AGME$ are două unghiuri opuse drepte, (5). Conform (1), (5) $\Rightarrow AGME$ este patrulater înscrisibil, (6). Conform (1), (6) $\Rightarrow m(\angle AGE) = m(\angle AME) = x^\circ$, (7). (7) $\Rightarrow m(\angle EAM) = 90^\circ - x^\circ$, (8). (8) $\Rightarrow m(\angle EAM) = 90^\circ - x^\circ = 180^\circ - m(\angle BAM) = m(\text{arc } BCM) : 2$, (9). Analog se deduce că: $m(\angle BCM) = 90^\circ - y^\circ = m(\text{arc } BAM) : 2$, (10).
 (9) și (10) $\Rightarrow 90^\circ - x^\circ = 90^\circ - y^\circ \Rightarrow x^\circ = y^\circ$, (11). Teorema unghiurilor opuse la vârf, (11) implică: proiecțiile lui M pe laturile triunghiului sunt puncte coliniare.

9. Se aplică teorema unghiului înscris într-un semicerc, (1). Se aplică teorema unicității perpendicularei într-un punct pe o dreaptă, (2). Se aplică teorema lui Simson, (3). (1) $\Rightarrow$ unghiurile BEM și AEM sunt drepte, (4), (2) și (4) $\Rightarrow E$ este proiecția lui M pe AB , (5). (1) $\Rightarrow$ unghiurile AGM și CGM sunt drepte, (6), (2) și (6) $\Rightarrow G$ este proiecția lui M pe AC , (7). (1) $\Rightarrow$ unghiurile BFM și CFM sunt drepte, (8), (2) și (8) $\Rightarrow F$ este proiecția lui M pe BC , (9). Conform (3),



(5), (7) și (9) $\Rightarrow$ punctele lor de intersecție, cu excepția punctului M , sunt coliniare.

10. Segmentele AD , BE , CF sunt ceviane. Se aplică proprietatea tangentelor dintr-un

punct exterior, (1). (1) $\Rightarrow AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$, (2). (2) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CD}{EA} \cdot \frac{EA}{BD} = 1$, (3). Conform teoremei lui Ceva, (3) implică segmentele AD , BE , CF au un punct comun.

11. Se aplică proprietatea bisectoarei: punctele bisectoarei unui unghi sunt egal depărtate de laturile unghiului, (1). Bisectoarea unghiului exterior B se intersectează cu bisectoarea unghiului exterior C în punctul D , (2). (1) și (2) $\Rightarrow \text{dist}(D, AC) = \text{dist}(D, BC) = \text{dist}(D, AB) \Rightarrow \text{dist}(D, AC) = \text{dist}(D, AB)$, (3). Conform (1), (3) $\Rightarrow D$ este un punct al bisectoarei unghiului BAC , (4), (4) $\Rightarrow D$ este centrul cercului exînscriș de rază $r_a = \text{dist}(D, BC)$,

12. Segmentele AD , BE , CF sunt ceviane. Se aplică proprietatea tangentelor dintr-un punct exterior, (1). Fie $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $BD = x$, $BC = y$, $EC = t$, $AE = z$, $AF = u$, $BF = v$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow a = x + y$ și $x + c = b + y$; $b = t + z$ și $t + a = c + z$; $c = u + v$ și $v + a = b + u \Rightarrow 2x = a + b - c$ și $2y = a - b + c$; $2t = b + c - a$ și $2z = a + b - c \Rightarrow x = z \Rightarrow$

$BD = AE$, (3). Analog rezultă: $DC = AF$, (4). $CE = BF$, (5). (3), (4) și (5) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot$

$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BF}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, (6). Conform teoremei lui Ceva (reciproca), (3) implică segmentele AD , BE , CF au un punct comun.

13. a) Se aplică proprietățile patrulaterului inscriptibil, (1). Fie $m(\angle DBC) = x^\circ$, $E, B - E - D$, astfel încât $m(\angle BAE) = x^\circ$ și $m(\angle DBA) = y^\circ$, (2). Conform UU, (1) și

(2) $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD$, (3). (3) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$, (4). (4) $\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE$, (5). Teo-

rema unghiului exterior implică: $m(\angle AED) = x^\circ + y^\circ$, (6). Conform UU, (1) și (6) $\Rightarrow$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$, (7). (7) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB}$, (8). (8) $\Rightarrow AD \cdot CB = AC \cdot DE$, (9). (5) și (9) $\Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot$

$CB = AC \cdot BE + AC \cdot DE \Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot CB = AC(BE + DE) \Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot CB = AC \cdot BD$.

14. Se aplică asemănarea triunghiurilor, (1). Conform (1), UU implică: $\triangle AEB \sim \triangle DEC$

și $\triangle AED \sim \triangle BEC$, (2). (2) $\Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{CD}$, (3); $\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE} = \frac{AD}{BC}$, (4). (3) și (4) $\Rightarrow$

$\frac{AC}{BE} = \frac{AE}{BE} + \frac{CE}{BE} = \frac{AD}{BC} + \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{BC \cdot AB}$, (5). (3) și (4) $\Rightarrow \frac{BD}{AE} =$

$\frac{BE}{AE} + \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AD} + \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot CD}{AB \cdot AD}$, (6). (5) și (6) $\Rightarrow \frac{AC}{BE} : \frac{BD}{AE} =$

$\frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{BC \cdot AB} : \frac{AB \cdot BC + AD \cdot CD}{AB \cdot AD} \Rightarrow \frac{AC}{BD} \cdot \frac{AE}{BE} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD} \cdot \frac{AB \cdot AD}{AB \cdot BC}$, (7). (4) și (7)

$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}$.

15. Se aplică: proprietățile patrulaterului inscriptibil, (1); proprietățile

liniei mijlocii, (2). Fie cercul circumscris triunghiului median (format de

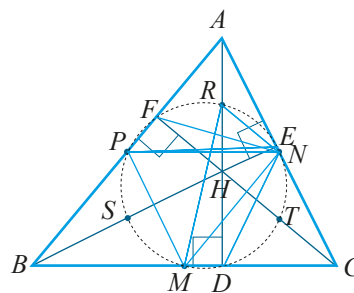
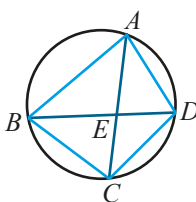
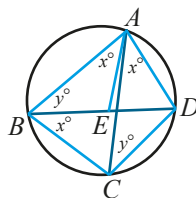
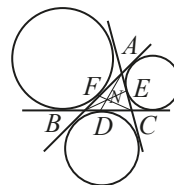
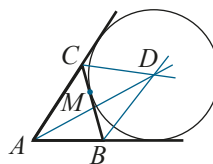
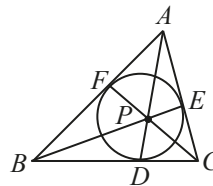
liniile mijlocii ale triunghiului), (3). $ND = 0,5AC$, (mediana din vârful un-

ghiului drept a triunghiului ADC), (4). (2) și (4) $\Rightarrow MDNP$ – trapez isos-

cel, (5). (3) și (5) $\Rightarrow M, D, N, P$ – puncte conciclice, (6). E și F determină

cu mijloacele laturilor trapeze isoscele, (7). (3), (6) și (7) $\Rightarrow M, D, N, P, E,$

F – puncte conciclice, (8). Conform Ip., (2) $\Rightarrow$ unghiul RNM este drept



(unghiuri cu laturile respectiv paralele), (9). Conform (1), Ip. și (9) $\Rightarrow MDER$ – patrulater inscriptibil, (10). (8) și (10) $\Rightarrow M, D, N, P, E, F, R$ – puncte conciclice, (11). Analog se arată că M, D, N, P, E, F, R, S – puncte conciclice și că $M, D, N, P, E, F, R, S, T$ – puncte conciclice.

16. Fie cercurile circumscrise triunghiurilor APN și CMN . Ele au punctele comune V și N , (1). Se aplică proprietatea unghiurilor opuse ale unui patrulater înscris sau inscriptibil, (2). Fie $m(\angle BAC) = x^\circ$, $m(\angle ABC) = y^\circ$, $m(\angle ACB) = z^\circ$, (2). Conform (2), (3) $\Rightarrow m(\angle PVN) = 180^\circ - x^\circ$, $m(\angle MVN) = 180^\circ - z^\circ$, (4). Conform proprietății unghiurilor în jurul unui punct, (3) $\Rightarrow m(\angle PVM) = 360^\circ - (180^\circ - x^\circ + 180^\circ - y^\circ) = x^\circ + z^\circ$, (4). $m(\angle PVM) + m(\angle PBM) = x^\circ + z^\circ + y^\circ = 180^\circ$, (5). Conform (2), (5) $\Rightarrow BMVP$ este patrulater inscriptibil, (6).

(1) și (6) $\Rightarrow$ cercurile circumscrise triunghiurilor APN , BMP și CMN au punctul comun V .

17. Fie M, N, P centrele cercurilor, (1). Ip. și (1) $\Rightarrow AM = AP = MB = MD = NB = ND = NC = PD = PC$, (2). (2) $\Rightarrow AMDP$, $MBND$, $NCPD$ sunt romburi, (3). (2) și (3) $\Rightarrow [BN] \equiv [AP]$ și $BN \parallel PC$, (4). Paralelogramul este patrulaterul cu două laturi paralele și congruente, (5). Conform (5), (4) $\Rightarrow ABNP$ – paralelogram, (6). (5) și (6) $\Rightarrow AB = NP$, (7). Analog se deduce că: $BC = MP$, $AC = MN$. (8). Conform LLL, (7) și (8) $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle NPM$, (9). (2) $\Rightarrow$ cercul circumscris triunghiului MNP este congruent cu cele trei cercuri, (10). (9) și (10) $\Rightarrow$ cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cele trei cercuri.

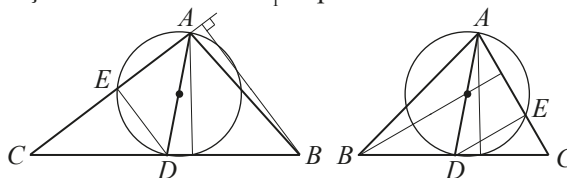
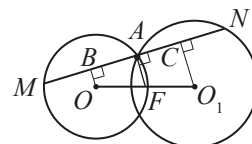
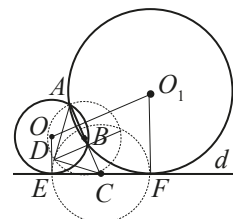
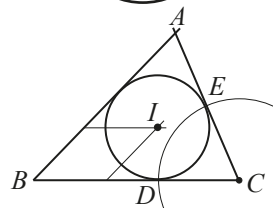
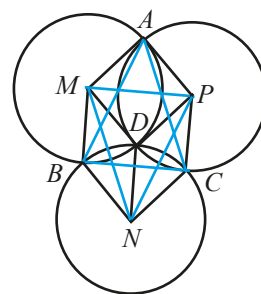
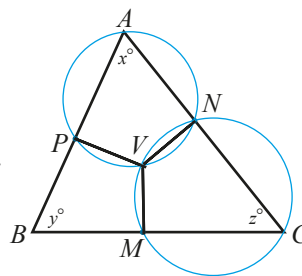
18. Se construiește: 1) unghiul B cu rigla și raportorul; 2) paralela la una dintre laturile unghiului B la distanța r ; 3) paralela la cealaltă latură a unghiului B la distanța r ; 4) punctul I , intersecția dreptelor construite la pașii 3 și 4; 5) cercul înscris în triunghi (de centru I și rază r); 6) D , punctul de tangență al cercului înscris cu BC ; 7) cercul de centru C și rază CD ; 8) E , al doilea punct de intersecție al celor două cercuri; 9) dreapta CE ; 10) A , intersecția dreptei CE cu cealaltă latură a unghiului B .

19. Se cercetează construcția care satisface condițiile cerute. Cercul de centru O conține punctele A și B , și este tangent dreptei d . AB intersectează d în C ; perpendiculara în B pe AC intersectează cercul de diametru AC în D . Teorema catetei implică: $DC^2 = BC \cdot AC$, iar conform teoremei puterii punctului exterior: $EC^2 = BC \cdot AC$. Rezultă: $DC = EC$. Se construiește: cercul de diametru AC ; perpendiculara în B pe AC intersectează cercul de diametru AC în D ; cercul de centru C și rază CD , care intersectează dreapta d în punctele E și F , $EC = DC = CF$; perpendicularele pe d respectiv în E și F intersectează mediatoarea segmentului AB în O , respectiv în O_1 . Soluțiile problemei sunt: cercul de centru O și rază OE ; cercul de centru O_1 și rază O_1F .

20. Fie figura geometrică cu proprietățile cerute. Se aplică proprietatea: razei perpendiculare (diametrului perpendicular) pe o coardă; perpendicularelor pe aceeași dreaptă; liniei mijlocii a unui trapez. A este mijlocul $[MN]$; $\text{pr}_{MN}O = B$, mijlocul $[AM]$; $\text{pr}_{MN}O_1 = C$, mijlocul $[AN]$; AF este perpendiculara în A pe MN .

Atunci F este mijlocul $[OO_1]$. Se construiește: mijlocul F al $[OO_1]$; segmentul AF ; perpendiculara în A pe AF intersectează a doua oară cercul de centru O în M și cercul de centru O_1 în punctul N .

21. Fie triunghiul ABC care satisface toate condițiile din enunț. Cercul de diametru AD (mediana din A) intersectează a doua oară AC în E . Atunci $DE = d(D, AC) = 0,5d(B, AC)$. Se construiește: punctul A ; dreapta d , care conține $[BC]$ la distanța dată $d(A, BC)$; mediana AD , D – mijlocul laturii BC ; cercul de diametru AD ; coarda $DE = 0,5d(B, AC)$; punctul C , intersecția



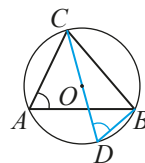
dreptei AE cu d ; punctul B , simetricul lui C față de D . Problema are 2 soluții, dacă $AD > d(A, BC)$, are o soluție, dacă $AD = d(A, BC)$ și nu are soluții, dacă $AD < d(A, BC)$.

22. Se construiește unghiul CDB , $C-O-D$, (1). (1) implică: unghiul CBD este drept, (2).

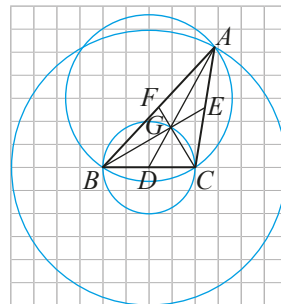
(1) și (2) implică: $\sin D = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin D} = 2R$, (4). (1) implică: $\angle BAC \equiv \angle CDB$, (5). (4) și

(5) implică: $\frac{a}{\sin A} = 2R$, (6). În același mod se deduce: $\frac{b}{\sin B} = 2R$ și $\frac{c}{\sin C} = 2R$, (7).

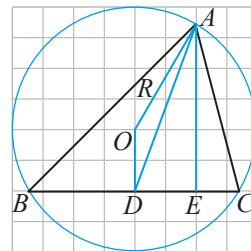
(6) și (7) implică: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.



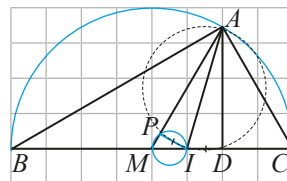
23. Fie triunghiul ABC cu proprietățile cerute. Raza cercului circumscris se poate afla din teorema sinusurilor sau aplicând teorema lui Pitagora. Cercul cu diametrul BC conține centrul de greutate, iar cercul cu centrul D și raza $AD = 3DG = 1,5BC$ conține vârful A (intersecția cu cercul circumscris). Se construiește: latura BC și se află raza cercului circumscris; cercul circumscris triunghiului; se construiește cercul de centru D (mijlocul $[BC]$) și rază $1,5BC$. Intersectând cercurile se obține vârful A al triunghiului ABC (cel mult două soluții de aceeași parte a dreptei BC). Soluțiile sunt triunghiuri congruente.



24. Triunghiul ABC satisface condițiile cerute. El este înscris în cercul de centru O și rază R , $AE = h_a$ înălțimea din A , $AD = m_a$ lungimea medianei din A . Se construiește: dreapta $d = BC$; punctul A situat la distanța h_a de dreapta d care conține BC ; punctul E aparține d , $AE = h_a$; punctul D , unul dintre punctele de intersecție al dreptei d cu cercul de centru A și rază $AD = m_a$ (dacă $m_a > h_a$ există două puncte); punctul O , intersecția dreptei perpendiculare pe d în punctul D cu cercul de centru A și raza $OA = R$; punctele B și C , intersecțiile cercului (circumscribit triunghiului). Dacă: 1) $m_a > h_a$ problema are două soluții; 2) $m_a = h_a$ problema are o soluție; 3) $h_a > m_a$ problema nu are soluții.

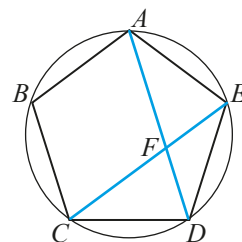


25. Triunghiul dreptunghic ABC satisface condițiile cerute și $M-I-D$. El este înscris în cercul de centru M și rază AM . $[AI]$ este bisectoare a triunghiului ABC , (1). Triunghiurile AMB și AMC sunt triunghiuri isoscele cu vârful M , (2). (2) $\Rightarrow m(\angle ABM) = m(\angle BAM) = x^\circ$, (3). (2) și (3) $\Rightarrow m(\angle ACM) = m(\angle MAC) = 90^\circ - x^\circ$, (4). $m(\angle DAC) = 90^\circ - (90^\circ - x^\circ) = x^\circ$, (5). (3) și (5) $\Rightarrow m(\angle DAC) = m(\angle BAM) = x^\circ$, (6). (6) $\Rightarrow [AI]$ este bisectoare și a triunghiului AMD , (7). (7) $\Rightarrow$ cercul de centru I și rază ID este tangent dreptelor AM și AD , (8). (8) $\Rightarrow$ Cercul de diametru MI intersectează AM a doua oară în P , (9). (7) și (9) $\Rightarrow [IP] \equiv [ID]$. Se construiește: dreapta d care conține latura BC ; punctul D al dreptei d ; punctul I al dreptei d astfel încât triunghiul AID este dreptunghic în D și $[AI]$ are lungimea dată; cercul de diametru MI ; cercul de diametru MI ; punctul P , intersecția cercurilor; punctul M al intersecției dreptei d cu AP ; cercul de centru M și rază AM ; punctele B și C intersecțiile cercului cu dreapta d . Problema are două soluții. Cele două triunghiuri sunt congruente.

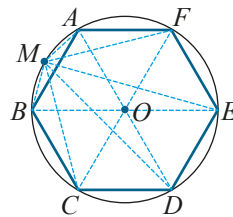


26. De demonstrat că F are proprietatea: $\frac{AF}{FD} = \frac{AD}{AF}$. (1). Se aplică proprietățile

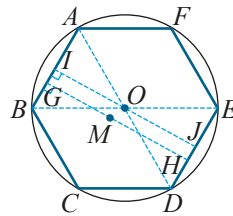
pentagonului regulat, (2). (2) $\Rightarrow ABCD$ și $ABCE$ sunt trapeze $\Rightarrow ABCF$ este romb (paralelogram cu două laturi consecutive congruente), (3). Conform UU, $\triangle DEF \sim \triangle ADE$ (triunghiuri isoscele cu unghiurile opuse bazelor congruente), (4). (4) $\Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{FD}{AE}$, (5). Conform (2), (3) $\Rightarrow [DE] \equiv [AE] \equiv [AF]$, (6). (5) și (6) $\Rightarrow$ (1).



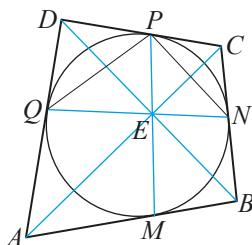
27. Diametrele AD , BE și CF sunt diagonale ale hexagonului regulat, (1). (1) implică: MAD , MBE și MCF sunt triunghiuri dreptunghice, (2). Conform teoremei lui Pitagora, (2) implică: $MA^2 + MD^2 = 4R^2$, $MB^2 + ME^2 = 4R^2$, $MC^2 + MF^2 = 4R^2$, (3). (3) implică: suma pătratelor distanțelor de la M până la vârfurile hexagonului este constantă $= 12R^2$. Rezultatul nu se modifică, dacă M este un vârf al hexagonului.



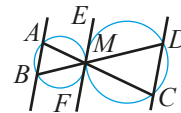
28. Suma distanțelor se află în funcție R , raza cercului circumscris. Latura hexagonului regulat $= R$. Apotema hexagonului regulat $= \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Se aplică unicitatea perpendicularei construite dintr-un punct pe o dreaptă sau mai multe drepte paralele, (1). $G = \text{pr}_{AB} M$, $H = \text{pr}_{DE} M$, (2). $I = \text{pr}_{AB} O$, $J = \text{pr}_{DE} O$, (3). Conform (1), (3) implică: punctele I , O , J sunt coliniare, (4). (2), (3) și (4) implică: punctele G , M , H sunt coliniare; $GHJI$ este dreptunghi, (5). (5) implică: suma distanțelor de la M până la AB și DE este $IJ = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$, (6). Același rezultat se obține pentru suma distanțelor de la M până la laturile BC și EF sau CD și AF , (7). (6) și (7) implică: suma distanțelor de la M până la laturile hexagonului este $k = 3R\sqrt{3}$.



29. Fie $QN \cap AC = \{E\}$, Se aplică teorema sinusurilor, (1). Se aplică teorema tangentelor (a ciocului de pasăre), (2). Conform (1), raportul lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egal cu raportul sinusurilor unghiurilor corespunzătoare lor, (3). Fie $m(\angle AQE) = x^\circ$, $m(\angle AEQ) = y^\circ$, (3). $m(\angle DQP) = m(\angle ENP) =$ jumătate din măsura arcului mic PQ , (4). (4) $\Rightarrow m(\angle PQE) = m(\angle CNP) =$ jumătate din măsura arcului mic PN , (5). (4) și (5) $\Rightarrow m(\angle DQE) = m(\angle CNE)$, (6). La fel se deduce că: $m(\angle AQE) = m(\angle BNE)$, (7). (7) $\Rightarrow \angle AQE$ și $\angle ENC$ sunt suplementare, (8). (1), (3) și (8) $\Rightarrow \frac{AQ}{AE} = \frac{\sin y^\circ}{\sin x^\circ}$ și $\frac{NC}{EC} = \frac{\sin y^\circ}{\sin x^\circ}$, (9). (9) $\Rightarrow \frac{AQ}{AE} = \frac{NC}{EC} \Rightarrow \frac{AQ}{CN} = \frac{AE}{EC}$, (10). În mod analog se deduce că punctul comun al dreptelor AC și MP împarte segmentul AC într-un raport egal cu $\frac{AM}{CP}$, (11). Conform (2), $\frac{AQ}{CN} = \frac{AM}{CP} = \frac{AE}{EC}$, (11). (11) implică: E este punctul comun al segmentelor AC , NQ și MP , (12). În același mod se deduce că segmentele BD , NQ și MP au un punct comun, (13). (12) și (13) implică: diagonalele patrulaterului și segmentele PM , NQ au punctul comun E .



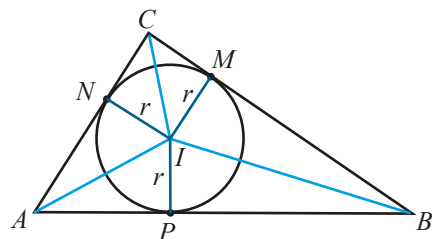
30. Fie EF tangenta comună cercurilor prin M . Se aplică teoremele: măsura unghiului înscris, (1); măsura unghiului format de tangentă cu o secantă, (2); a unghiurilor opuse la vârf, (3); a dreptelor paralele, (4). (1) și (2) $\Rightarrow \angle BAC \equiv \angle BMF$ și $\angle EMD \equiv \angle ACD$, (5). (3) și (5) $\Rightarrow \angle BAC \equiv \angle ACD$, (6). (4) și (6) $\Rightarrow AB \parallel CD$.



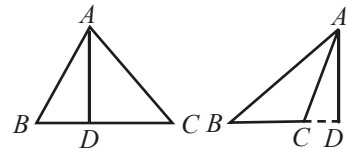
Modulul 7. Arii

Suplimentar

1. Triunghiul ABC se descompune în triunghiuri AIB , BIC și AIC , unde I centrul cercului înscris în triunghi de rază, (1). (1) $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AIB} + \mathcal{A}_{BIC} + \mathcal{A}_{AIC}$, (2). Se aplică teorema: raza în punctul de tangență este perpendiculară pe tangentă, (3). (3) $\Rightarrow \mathcal{A}_{AIB} = 0,5cr$, $c = AB$, (4). La fel se deduce: $\mathcal{A}_{BIC} = 0,5ar$ și $\mathcal{A}_{AIC} = 0,5br$, (5). c.ă: $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5cr + 0,5br + 0,5ar = pr$.



2. Se aplică T.Pitagora, (1). Unghiul ADC este drept, (2). Conform (1), (2) $\Rightarrow AD^2 = AC^2 - CD^2$, (3). T.Pitagora Gen, implică: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$, (4). $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, (5). (4) și (5) $\Rightarrow DC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, (6). (3) și (6) $\Rightarrow AD^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 \Rightarrow AD^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} \Rightarrow 4a^2 \cdot AD^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \Rightarrow 4a^2 \cdot AD^2 = (a^2 + b^2 + 2ab - c^2)(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)) \Rightarrow 4a^2 \cdot AD^2 = (a + b + c)(a + b - c)(c^2 - (a - b)^2) \Rightarrow 4a^2 \cdot AD^2 = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)$, (7). $a + b + c = 2p$, $AD = h_a$, (8). (7) și (8) $\Rightarrow h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



3. Se aplică propozițiile: $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5ah_a$, (1); $h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, (2). (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Se aplică rezultatele de la ex. 1 și 3. $p = 10$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$ cm². $\mathcal{A}_{ABC} = 10r$. Atunci $r = \sqrt{3}$ cm.

5. $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5ac \sin B$, (1). Teorema sinusurilor implică $\frac{b}{\sin B} = 2R$, (2). (1) și (2) $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

6. $\mathcal{A}_{ABC} = 0,5ac \sin B$ și $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ implică $a = 2R \sin A$, $c = 2R \sin C$, de unde $\mathcal{A}_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

7. $m(\angle C) = 105^\circ \Rightarrow \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \cos 15^\circ \approx 0,97$. Se ține cont că: $\mathcal{A}_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.
Răspuns: $\mathcal{A}_{ABC} \approx 31,04\sqrt{2}$ cm².

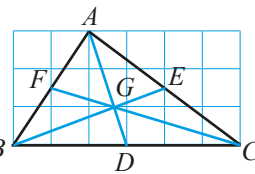
8. Se aplică formula lui Heron și celelalte formule demonstrate mai sus.

a	b	c	p	$\mathcal{A}$	r	R
8	7	11	13	$2\sqrt{195}$	$\frac{2\sqrt{195}}{13}$	$\frac{77\sqrt{195}}{195}$

9. $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ sau $\mathcal{A} = 0,5h_a a$. Atunci:

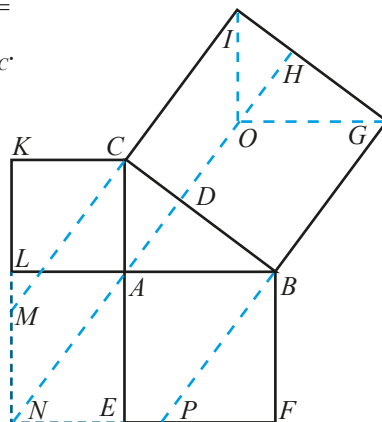
$h_a = \frac{2\mathcal{A}}{a}$, $h_b = \frac{2\mathcal{A}}{b}$, $h_c = \frac{2\mathcal{A}}{c}$. 10. $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ sau $\mathcal{A} = 0,5ab \sin C$. Atunci: $\sin C = \frac{2\mathcal{A}}{ab}$, $\sin B = \frac{2\mathcal{A}}{ac}$, $\sin A = \frac{2\mathcal{A}}{bc}$.

11. Se aplică de două ori teorema medianei pentru arii. Pentru triunghiul ABC : $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ADC}$ (1). Pentru triunghiul BGC : $\mathcal{A}_{GBD} = \mathcal{A}_{GDC}$ (2). Se scad ariile. (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{AGC}$. b) $\mathcal{A}_{BFC} = \mathcal{A}_{BEC} = 0,5 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$ (3). (2) și (3) implică $\mathcal{A}_{BFG} = \mathcal{A}_{CGE}$.

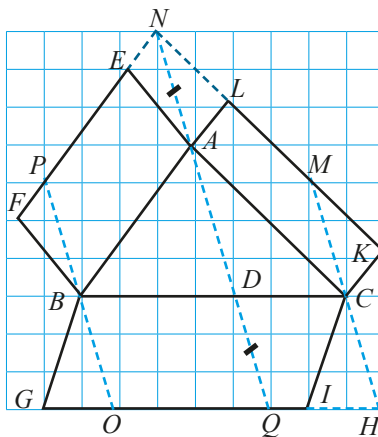


12. Triunghiurile ABD și ABC sunt echivalente, (1). Rezultă că $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{AOB}$, $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{AOB}$ (2). (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$.

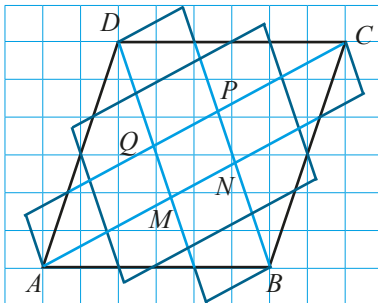
13. K, L, M, N sunt coliniare. N, E, P, F sunt coliniare. $ALNE$ este dreptunghi. $M-C-I$, $P-B-G$. $OI \parallel AC$, $OG \parallel AB$. Triunghiurile dreptunghice CKM , NEA , IOG , PFB sunt congruente. Rezultă $ACMN$, $AOIC$, $ANPB$, $ABGO$ sunt paralelograme, de unde $MC \parallel AN$, punctele N, A, D, O, H sunt coliniare, iar $CDHI$ și $DBGH$ sunt dreptunghiuri. Din rezultatele anterioare se deduce: $\mathcal{A}_{CDHI} = \mathcal{A}_{AOIC} = \mathcal{A}_{ACMN} = \mathcal{A}_{ACKL}$ (1). Analog se deduce că: $\mathcal{A}_{BGHD} = \mathcal{A}_{ABGO} = \mathcal{A}_{ANPB} = \mathcal{A}_{AEFB}$ (2). (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_{BGIC} = \mathcal{A}_{AEFB} + \mathcal{A}_{ACKL}$.



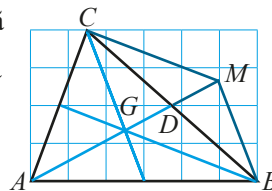
14. N, A, D, Q sunt coliniare. P, B, O sunt coliniare. De asemenea, M, C, H sunt coliniare. $BO \parallel NQ \parallel CH$ implică $ANPB, OQDB, QHCD, ACMN$ sunt paralelograme. Din rezultatele anterioare se deduce: $\mathcal{A}_{BGIC} = \mathcal{A}_{BOHC} = \mathcal{A}_{BOQD} + \mathcal{A}_{DQHC}$ (1); $\mathcal{A}_{AEFB} = \mathcal{A}_{ANPB} = \mathcal{A}_{BOQD}$ și $\mathcal{A}_{ACKL} = \mathcal{A}_{ACMN} = \mathcal{A}_{DQHC}$ (2). (1) și (2) implică: $\mathcal{A}_{BGIC} = \mathcal{A}_{AEFB} + \mathcal{A}_{ACKL}$.



15. Desenul se completează cu paralele obținând o rețea de paralelograme congruente cu $MNPQ$. Completați desenul cu litere și demonstrați prin congruențe de triunghiuri că $\mathcal{A}_{ABCD} = 10 \mathcal{A}_{MNPQ}$. Așadar, $\frac{\mathcal{A}_{MNPQ}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = 0,1$.



16. a) Fie M simetricul lui G față de D . Se demonstrează că $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \mathcal{A}_{BCG}$ și că $\mathcal{A}_{BCG} = \mathcal{A}_{GBM}$. Triunghiul GBM are lungimile laturilor 4 cm, 5 cm, 7 cm. Aria lui se calculează aplicând formula lui Heron. b) Se procedează ca la a) Triunghiul GBM are lungimile laturilor 10 cm, 24 cm, 26 cm. Deoarece 10, 24, 26 este un triplet pitagoreic, triunghiul GBM este dreptunghic. $\mathcal{A}_{GBM} = (10 \cdot 24 : 2) \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$. **Răspuns:** $\mathcal{A}_{ABC} = 360 \text{ cm}^2$. c) Se procedează ca la b).



17. Se ține cont că $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{COD} + \mathcal{A}_{AOD}$, (1), și că unghiurile suplimentare au același sinus, (2). (2) implică; $\mathcal{A}_{AOB} = 0,5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin O$;

$\mathcal{A}_{BOC} = 0,5 \cdot OC \cdot OB \cdot \sin O$; $\mathcal{A}_{COD} = 0,5 \cdot OC \cdot OD \cdot \sin O$; $\mathcal{A}_{AOD} = 0,5 \cdot OC \cdot OB \cdot \sin O$, (3). $\mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOC} + \mathcal{A}_{COD} + \mathcal{A}_{AOD} = 0,5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin O +$

$0,5 \cdot OC \cdot OB \cdot \sin O + 0,5 \cdot OC \cdot OD \cdot \sin O + 0,5 \cdot OD \cdot OA \cdot \sin O =$

$0,5 \cdot OB(OA + OC) \cdot \sin O + 0,5 \cdot OD(OA + OC) \cdot \sin O = 0,5 \cdot d_1(OB + OD) \cdot \sin O = 0,5 \cdot d_1 d_1 \cdot \sin O$, (3). (1) și (3) implică: $\mathcal{A}_{ABCD} = 0,5 d_1 d_2 \sin O$.

18. Deoarece $ABCD$ este inscriptibil, $\Delta MAB \sim \Delta MCD$, (1). (1) implică (v. desenul)

$\frac{x}{b+y} = \frac{y}{d+x} = \frac{a}{c}$, (2). (2) implică $(c^2 - a^2)x = abc + a^2d$, $(c^2 - a^2)y = a^2b + acd$, (3).

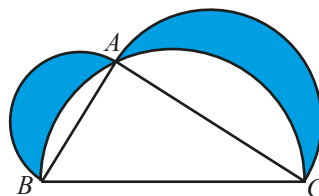
$\mathcal{A}_{MAB} = 0,25 \sqrt{(x+y+a)(x+y-a)} \cdot \sqrt{(x-y+a)(-x+y+a)}$, (4). (3) implică:

$(c^2 - a^2)(x+y+a) = a(a+c)(b+d-a+c)$, $(c-a)(x+y+a) = a(-a+b+c+d)$ sau $(c-a)(x+y+a) = 2a(p-a)$; $(c-a)(x+y-a) = a(a+b-c+d)$ sau $(c-a)(x+y-a) = 2a(p-c)$; $(c+a)(x-y+a) = a(a+b+c-d)$ sau $(c+a)(x-y+a) = 2a(p-d)$; $(c+a)(-x+y+a) = a(a-b+c+d)$ sau $(c+a)(-x+y+a) = 2a(p-b)$, (5).

(4) și (5) implică $\mathcal{A}_{MAB} = \frac{a^2}{c^2 - a^2} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, (6). (1) și (2) implică

succesiv: $\frac{\mathcal{A}_{MDC}}{\mathcal{A}_{AMB}} = \frac{a^2}{c^2}$, $\frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{AMB}} = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$, (7). (6) și (7) implică $\mathcal{A}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

19. $\mathcal{A}_1$ este aria semicercului de diametru AB , $\mathcal{A}_2$ este aria semicercului de diametru AC , $\mathcal{A}_3$ este aria semicercului de diametru BC . $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_3 = 0,25\pi AB^2 + 0,25\pi AC^2 + \mathcal{A}_{ABC} - 0,25\pi BC^2 = \mathcal{A}_{ABC}$.



20. Se aplică formula lui Brahmagupta.

21. D aparține laturii BC a triunghiului ABC și E este mijlocul $[AD]$ implică $\mathcal{A}_{ABC} = 2\mathcal{A}_{BEC}$, (1). F este mijlocul $[BE]$ implică $\mathcal{A}_{BEC} = 2\mathcal{A}_{CEF}$, (2). G este mijlocul $[CF]$ implică $\mathcal{A}_{CEF} = 2\mathcal{A}_{EFG}$, (3). (1), (2) și (3) implică $\mathcal{A}_{EFG} = 9 \text{ cm}^2$.

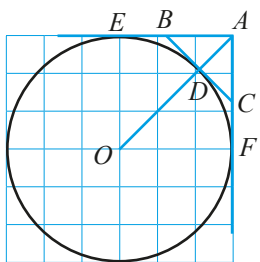
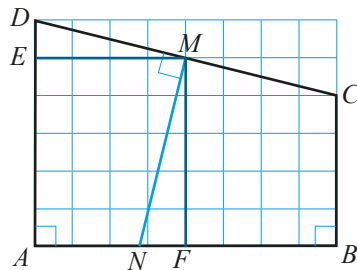
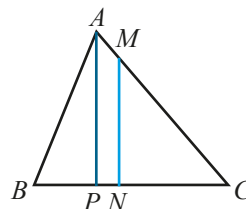
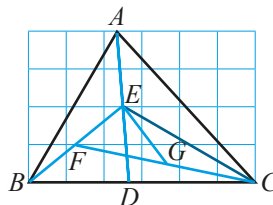
22. Aria pătratului este $2R^2$; aria triunghiului echilateral circumscris aceluiași cerc este $3R^2\sqrt{3}$. **Răspuns:** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

23. $P = \text{pr}_{BC} A$. Aplicând formula lui Heron, $\mathcal{A}_{ABC} = 84 \text{ cm}^2$, iar $AP = (2 \cdot 84 : 14) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$. $\mathcal{A}_{MNC} = 42 \text{ cm}^2$, $PC = 9 \text{ cm}$. TFA implică $\triangle APC \sim \triangle MNC$, de unde $\frac{AP}{MN} = \frac{PC}{NC}$ sau $\frac{MN}{NC} = \frac{4}{3}$, (1). $0,5MN \cdot NC = 42 \text{ cm}^2$, (2). Înmulțind (1) și (2), se obține $MN = 4\sqrt{7} \text{ cm}$.

24. $E = \text{pr}_{AD} M$, $F = \text{pr}_{AB} M$. Triunghiurile MED și MFN sunt asemenea.

Rezultă $\frac{DE}{NF} = \frac{ME}{MF}$, de unde $NF = 5 : 4 = 1,2$. $\mathcal{A}_{ADMN} = \mathcal{A}_{ADMF} - \mathcal{A}_{MNF} = 4(6 + 5) : 1,2$. $\mathcal{A}_{ADMN} = \mathcal{A}_{ADMF} - \mathcal{A}_{MNF} = 4(6 + 5) : 2 - 5 \cdot 1,2 : 2 = 19$.

25. Fie R raza cercului, $R = AE = AF$. $[EB] \equiv [BD] \equiv [DC] \equiv [CF]$, $[BD] \equiv [AD]$, $AD = 0,2 \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm} = 1,5\sqrt{2} \text{ cm}$. $R = (3 + 1,5\sqrt{2}) \text{ cm}$.



Modulul 8. Poliedre Suplimentar

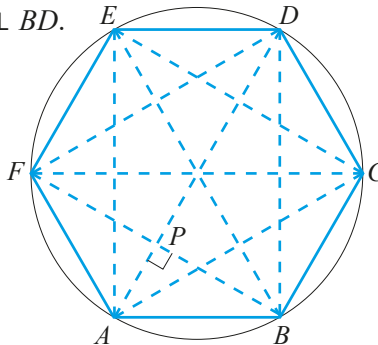
1. a) $MA \perp (ABC)$ și BD inclusă în (ABC) implică $BD \perp AM$, (1). $[AD]$ – diametru implică $BD \perp AB$, (2). (1) și (2) implică $BD \perp (AMB)$, de unde $MB \perp BD$. 2. a) $M \notin (ABC)$ și $MA \perp (ABC)$ implică: $MA \perp BC$, (1). $ABCD$ este dreptunghi implică: $BC \perp AB$, (2). (1) și (2) implică: $BC \perp (AMB)$. Rezultă $MB \perp BC$. 3. a) $M \notin (ABC)$ și $MA \perp (ABC)$ implică: $MA \perp BC$, (1). $ABCD$ este pătrat implică: $BC \perp AB$, (2). (1) și (2) implică: $BC \perp (AMB)$. Rezultă $MB \perp BC$. 4. a) Deoarece $[AD]$ este diametru, unghiul ABD este drept. Rezultă că $AB \perp BD$, (1). $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$ și BD inclusă în (ABC) implică: $MA \perp BD$, (2). (1) și (2) implică $BD \perp (ABM)$. Rezultă $MB \perp BD$.

5. a) $[AD]$ este diametru perpendicular pe coarda BF în P . Rezultă că $BF \perp AP$, (1). $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$ și BF inclusă în (ABC) implică: $MA \perp BF$, (2). (1) și (2) implică $BF \perp (APM)$. Rezultă $MP \perp BF$, de unde $P = \text{pr}_{BF} M$.

6. a) $B \notin \beta$, $C = \text{pr}_{\beta} B$ ($BC \perp \beta$), $a \subset \beta$ implică: $a \perp BC$, (1). $D = \text{pr}_a C$ implică $a \perp CD$, (2). (1) și (2) implică: $a \perp (BCD)$. Rezultă $BD \perp a$, $D = \text{pr}_a B$. $[BD]$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic BCD , de unde (T. Pitagora) $BD = 25 \text{ cm}$.

7. a) $B \notin \beta$, $C = \text{pr}_{\beta} B$ ($BC \perp \beta$), $a \subset \beta$ implică: $a \perp BC$, (1). $D = \text{pr}_a B$ implică $a \perp BD$, (2). (1) și (2) implică: $a \perp (BCD)$. Rezultă $CD \perp a$, $D = \text{pr}_a C$. $[BD]$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic BCD , de unde (T. Pitagora) $CD = 5\sqrt{5} \text{ cm}$.

8. a) $[BD]$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic BCD , de unde (T. Pitagora) $BC = \sqrt{161} \text{ cm}$. 9. a) $[A_1O]$ este ipo-

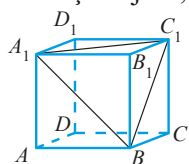


nuza triunghiului dreptunghic A_1OA , de unde (T. Pitagora) $A_1O = 2,5\sqrt{5}$ cm. **10.** a) $[BE]$ este diametrul perpendicular pe coarda AC în P . Rezultă că $BE \perp AP$, (1). $M \notin (ABC)$, $MA \perp (ABC)$ și BE inclusă în (ABC) implică: $MA \perp BE$, (2). (1) și (2) implică $BE \perp (APM)$. Rezultă $MP \perp BE$, de unde $d(M, BE) = MP$. $[MP]$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic MAP . $AP =$ jumătate din lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul circumscris hexagonului $= 0,5AB\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm. Rezultă $MP = 8\sqrt{3}$ cm. **11.** a) Cf. rezolvării ex. 5, $d(M, BF) = MP$, P – mijlocul $[BF]$. Se arată că $AP = 0,5R = 0,5AB = 1$ cm. Se obține $MP = \sqrt{197}$ cm. **12.** a) Se arată că $d(M, BD) = MO$, unde O este intersecția diagonalelor. $[MO]$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic MAO . $MO = 15\sqrt{2}$ cm. **13.** a) Triunghiurile dreptunghice MOA , MOB și MOC sunt congruente. $AM = MB = MC = 41$ cm. **14.** a) Triunghiurile dreptunghice MID , MIE și MIF sunt congruente. $DM = ME = MF = 5\sqrt{41}$ cm. **15.** a) $IM = 21$ cm. **16.** a) $[IM]$ este catetă a triunghiului dreptunghic IME cu ipotenuza $[ME]$. $IE = 8$ cm, $IM = 6\sqrt{17}$ cm. **17.** a) ABC este triunghi echilateral cu centrul cercului circumscris O . Conform teoremei punctelor egal depărtate de punctele unui cerc, $d(V, (ABC)) = VO$. Se obține $VO = 3\sqrt{21}$ cm. **18.** Se ține cont că $R = 2r$. a) $d(V, (ABC)) = VO = 16\sqrt{2}$ cm. **19.** a) Deoarece V este egal depărtat de punctele A, B, C, D rezultă că V aparține perpendicularei pe (ABC) în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC . $d(V, (ABC)) = 10\sqrt{15}$ cm.

Modulul 9. Corpuri de rotație

Suplimentar

1. Teorema liniei mijlocii implică: segmente EF și GH sunt paralele și congruente, (1). (1) implică: $EFGH$ este paralelogram. Rezultă că: EG și FH au punctul comun P , (2). La fel se demonstrează că EG și IJ au același mijloc, punctul P . P este mijlocul comun al segmentelor terminate de mijloacele laturilor opuse ale tetraedrului.

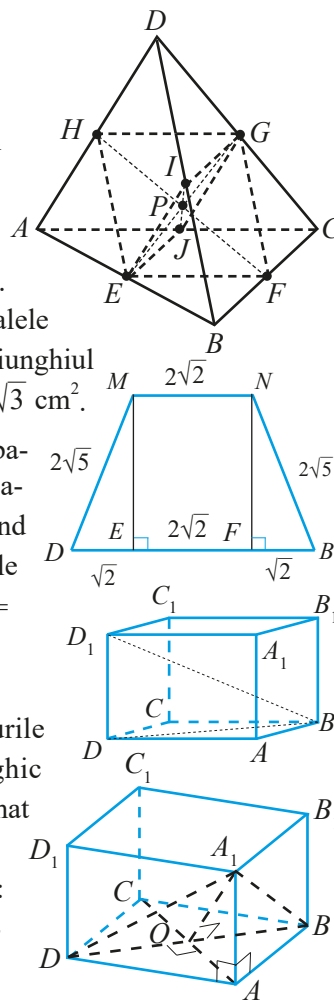


2. Fețele cubului sunt pătrate cu laturile de 7 cm. Diagonalele fețelor sunt segmente de lungime $7\sqrt{2}$ cm. Prin urmare, triunghiul BC_1A_1 este echilateral. Aria lui este $0,5(7\sqrt{2})^2 \sqrt{3} \text{ cm}^2 = 7\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

3. Conform teoremei fierăstrăului, intersecțiile planului MDB cu planele bazelor sunt drepte paralele. Triunghiurile dreptunghice D_1DM și B_1BN au catetele respectiv congruente. Prin urmare, $BNMD$ este trapez isoscel. Aplicând teorema lui Pitagora, $DM = BN = 2\sqrt{5}$ cm. Diagonalele pătratului cu laturile de 4 cm au lungimile de $4\sqrt{2}$ cm. Proprietatea liniei mijlocii implică $MN = 2\sqrt{2}$ cm. Înălțimea trapezului $BNMD$ este $3\sqrt{2}$ cm. Aria trapezului este $0,5(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2})3\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$.

4. $36 : 6 = 6$. Aria bazei prisme este $\mathcal{A}_b = 6 \text{ cm}^2$. Pătratul $ABCD$ are laturile de $\sqrt{6}$ cm și $AC = 2\sqrt{3}$ cm. $36 + 12 = 48 = (4\sqrt{3})^2$. Triunghiul dreptunghic BD_1D are o catetă de $2\sqrt{3}$ cm (BD), și ipotenuza de $4\sqrt{3}$ cm. Unghiul format de diagonala prisme D_1D cu planul bazei prisme este $\angle D_1BD$ de 60° .

5. $128\sqrt{2} : (4\sqrt{2}) = 32$; $32 : 4 = 8$. $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot AA_1 = 4AB \cdot AA_1$. Rezultă: $AB = 8$ cm; $AC = 8\sqrt{2}$ cm; $AO = 4\sqrt{2}$ cm. Se aplică teorema celor trei perpendiculare: $AA_1 \perp (ABD)$ și $AO \perp BD$ implică $A_1O \perp BD$. $AO \perp BD$ și $A_1O \perp BD$ implică: măsura unghiului format de planul A_1BD cu planul bazei $= m(\angle A_1OA)$. Triunghiul A_1OA este dreptunghic în O este isoscel. Rezultă: $m(\angle A_1OA) = 45^\circ$.



Cuprins

ALGEBRA	3
1. Recapitulare și completări	
1. Mulțimea numerelor reale	4
2. Reprezentarea numerelor reale pe axă	6
3. Operații cu numere reale	8
4. Puteri cu exponent înreg.....	10
5. Radicali de ordinul 2	12
6. Raționalizarea numitorilor rapoartelor	14
2. Rapoarte algebrice	
1. Noțiunea de raport algebric.....	20
2. Amplificarea rapoartelor. Simplificarea rapoartelor.....	22
3. Adunarea rapoartelor.....	25
4. Înmulțirea rapoartelor.....	27
5. Puteri cu exponent număr întreg	29
6. Transformări ale expresiilor algebrice	31
3. Funcții	
1. Noțiunea de funcție	36
2. Funcția de gradul II	38
3. Funcția de gradul II de formă incompletă	40
4. Funcția de gradul II de formă incompletă	42
5. Funcția de gradul II de formă completă	44
6. Funcția de gradul II de formă completă	46
7. Proprietățile funcției de gradul II	48
8. Proprietățile funcției de gradul II	50
9. Semnul funcției de gradul II.....	52
10. Funcția putere.....	54
4. Ecuații. Inecuații. Sisteme	
1. Noțiunea de ecuație	58
2. Ecuația de gradul II	60
3. Ecuația rațională.....	62
4. Sisteme de ecuații.....	64
5. Rezolvarea problemelor	66
6. Inecuații de gradul I cu o necunoscută.....	72
7. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută.....	74
8. (Suplimentar) Totalități de inecuații.....	76
9. Inecuații de gradul II cu o necunoscută.....	78
10. Metoda intervalelor.....	80
5. Elemente de statistică și de probabilități	
1. Noțiunea de probabilitate	88
2. Colectarea, organizarea și reprezentarea datelor.....	91
3. Elemente de calcul financiar	95
GEOMETRIA	97
6. Recapitulare și completări	
1. Cercul. Discul. Elemente.....	98
2. Unghiuri	100
3. Pozițiile unei drepte față de cerc	102
4. Arce și coarde.....	104
7. Arii	
1. Ariile pătratului, dreptunghiului, triunghiului.....	110
2. Triunghiuri	112
3. Ariile patrulaterelor.....	114
8. Poliedre	
1. Prisma. Elemente. Clasificare	120
2. Desfășurarea prisme. Aria laterală. Aria totală	122
3. Volumul prisme.....	124
4. Piramida. Elemente. Clasificare	128
5. Suplimentar. Piramide regulate particulare	130
6. Desfășurarea piramidei. Aria laterală. Aria totală	132
7. Volumul prisme.....	134
8. Trunchiul de piramidă. Elemente. Clasificare.....	138
9. Corpuri de rotație	
1. Cilindrul circular drept. Elemente.....	150
2. Aria laterală. Aria totală. Volumul cilindrului circular drept.....	152
3. Conul circular drept. Elemente	156
4. Aria laterală. Aria totală. Volumul conului circular drept.....	158
5. Trunchiul de con circular drept. Elemente	162
7. Sfera. Elemente	168
8. Zona și calota sferică. Aria și volumul unei sfere	170
Răspunsuri. Rezolvări	176